www.khalvati.ir

تحلیل سازه ها

۹۷/۳/۱۹

1- درجه نامعینی سازه

2- محاسبه نیروهای داخلی

3- تحلیل خرپاها و قاب‌های ساده

4- خط تاثیرها (برای سازه‌های معین)

5- محاسبه تغییر شکل‌ها

6- تحلیل سازه نامعین (به روش شیب افت)

7- تحلیل تقریبی سازه‌ها

.....

مجهولاتی که در سیستم سازه‌ای داریم
- نیروهای داخلی
  - برشی
  - خمشی
  - محوری
- تغییر مکان‌ها
  - Δ
  - θ

هدف به دست آوردن مجهولات فوق است.

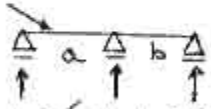
ابزار کار در به دست آوردن مجهولات فوق، «معادلات» هستند

* معادلات:

دسته ۱) تعادل استاتیکی: $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M_z = 0$

نیروهای محور y، محور x تعادل می‌کنند.

همواره این نیروهای تعادل سه تا هستند. مثال)



$\Sigma F_y = 0$ ، $\Sigma M = 0$ ، ~~$\Sigma F_x = 0$~~

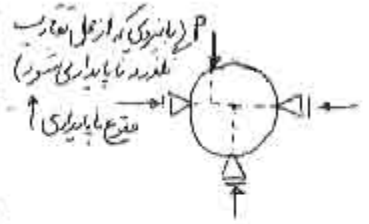
دو شرط عدم پایداری: ناپایداری کلی یا موضعی

* در شرایط خیلی خاص تعداد معادلات تعادل کمتر از سه تا می‌باشد:

الف) وقتی که تمام نیروها با هم موازی باشند.

Page 1

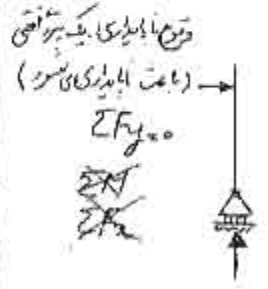
www.khalvati.ir



ب) اگر نیروها همگرا در نقطه قطع کنند در این حالت معادله تعادل گشتاور حذف می‌شود.

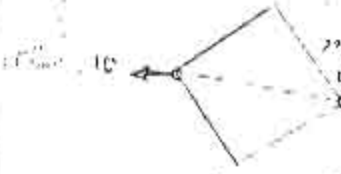
$\Sigma M=0$

$\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ داریم.



ج) وقتیکه تمام نیروها روی یک خط قرار گرفته باشند. در این حالت فقط معادله تعادلی که در امتداد آن خط نوشته می‌شود، باقی می‌ماند دو معادله دیگر حذف می‌شوند.

د) برای شکل مقابل هیچ معادله تعادلی نمی‌توان نوشت.



در واقع این شکل مجهول دارد ولی در واقع شکل ناپایدار می‌شود و برای یکی از نیروهای داخلی نمی‌توان معادله تعادل نوشت.

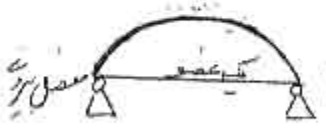
سازه‌هایی را از سه معادله تعادل بیشتر دارند، نامعین می‌گویند.

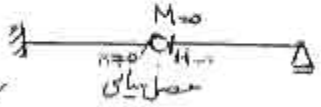
با بررسی بخش‌های فوق مشخص می‌شود که این سازه‌ها اصلی ناپایدار هستند که تحت تاثیر بارهای خاصی پایدار خواهند شد. احتمالاً به آنها «پایدار مشروط» می‌گوییم.

بند 2) موارد استثنایی

الف) مفصل داخلی (مفصل داخل اعضا، داخل عضو ضرب شود)

✓





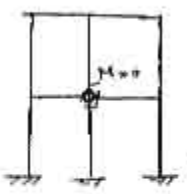
نکته: منظور دو انتهای عضو که به مفصل می‌رسند، آنجاست که لنگر صفر است.

www.khalvati.ir

* پس در صورتی که این عضو میانی، n عضو مستقل باشد،

$(n-1)$ معادله شرطی یا کمکی داریم.

(زیرا که کلی از معادلات قبلاً در تعادل خود دایره استفاده شده است) مثل:

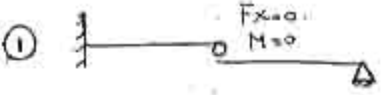


ب) عضو میانی

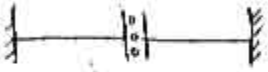
* همانند تعادت تغییر مکان و ناپایداری توصیه کنید.

عضو دارای تغییر مکان، ناپایداری خود را حفظ می کند و ناپایداری مانند قبلی است که از بین رود

* در عضو میانی، دو معادله شرطی یا کمکی داریم.

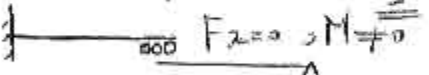


F ، M



مثل این است که طول نشیمن را زیاد کنیم، تغییر مکان می کند و لنگر در آن می افتد. که نشانه آن جسم (000) است.

* در عضو میانی، با طول اضافی زیاد فقط یک معادله شرطی یا کمکی داریم ← F



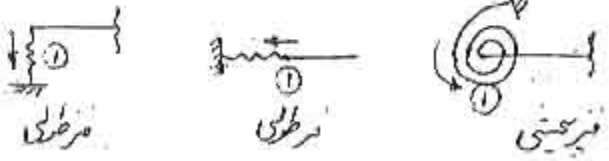
تذکر: هر جا عرضی در سازه تعیین شده باشد، شناظر با آن قید نیز در سازه داریم.

« کل معادلات = جمع معادلات ⟨ تعادلی / شرطی

www.khalvati.ir

*مجهولات

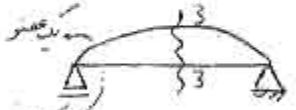
۱) عکس العمل های تکیه گاهی



۲) مجهولات داخلی

هر کابل بسته، سه یا سه مجهول می دهد.

معادله 3 + 3 = 6
مجهول 3 + 3 = 6
معین



معادله 3 + 3
مجهول 3 + 3
3

۳) مجهول اضافه تولید می شود که یا قطع زدن یا مجهول تولید می شود.

هر کابل بسته، سه مجهول اضافی ایجاد می کند

شکل هندسی این کابل اهمیتی ندارد فقط بسته باشد.

↓

3 درجه نامعینی

www.khalvati.ir

1) معادلات = مجهولات یک دستگاه جواب دارد.
مثل $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+y=7 \end{cases}$
یعنی سازه قابل حل است که نام آن را سازه معین می‌گذاریم.

2) معادلات > مجهولات این دستگاه بی‌نهایت جواب دارد مثل: $2x+4y=9$
یعنی سازه بی‌نهایت جواب دارد، یعنی بی‌نهایت دستگاه نیرو برای تعادل سازه می‌توان پیدا کرد که اصطلاحاً آن را سازه نامعین می‌گوییم.
برای حل این معادلات، یک معادله به آن اضافه می‌کنیم که به آنها معادلات تبدیر شکلی می‌گوییم. مثل: $\Delta=0$
$\begin{cases} 2x+4y=9 \\ \Delta=0 \end{cases}$

3) معادلات < مجهولات این دستگاه جواب ندارد که
مثل: $\begin{cases} 2x=6 \\ 3x=10 \end{cases}$
یعنی سازه جواب ندارد که به آن اصطلاحاً ناپایدار می‌گوییم.
پس به این معنی است که شرایط تعادل را نتوانستیم برقرار کنیم سازه نامعین ناپایدار است.

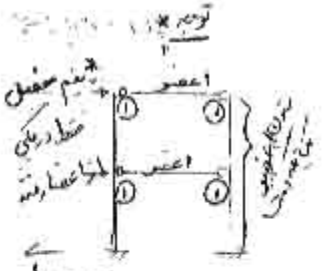
۸۱/۸/۲۶

بعضی مکان اضافی دارد ولی باعث ناپایداری سازه می‌شود.
پایدار است، اما درجه نامعینی است.
* که در سه تا نداریم.
* مجهولات فقط تکیه‌گاهی است.

(مجهولات) $C=4$
(معادلات) $E=3$
درجه نامعینی $= 1$

Page 5

www.khalvati.ir



توجه *

پایدار است. بخت آزمایی
جایی پایدار است لیکن نکته‌ای از
ناپایداری حلزونی می‌کند.

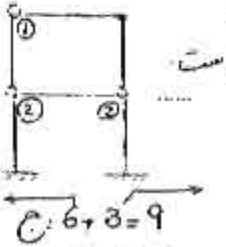
دو تیر با جابجایی یک درجه آزادی
۴ تا اتصال مفصلی است و با ۴
اتصال ساده می‌شود، بنابراین
ناپایدار است.

الف)
برای پایداری، یا از یک عضو قطری و یا تکیه‌گاهی

از عضو قطری استفاده می‌کنیم

(ب)
بررسی حالت:

(الف)



پایدار است

① کادر سخت

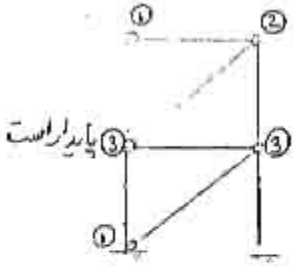
ج: 6 + 3 = 9

ع: 3 + 5 = 8

(شرطی) اعضا متصل - متصل بیرونی

① درجه نامعین است

۱ ،



پایدار است

* المان قطری در هر متصل، ① یکی
درجه‌ی فقط محول است.
پس به سخت قبلی، ② درجه نامعین می‌شود

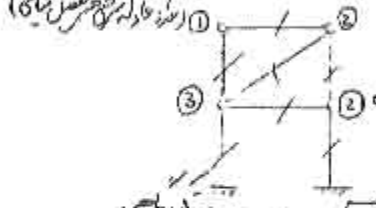
③ کادر سخت

ج: 6 + 9 = 15

ع: 3 + 10 = 13

② درجه نامعین ، ۲ شرطی بیرونی

بررسی حالت:
(الف)



(اتصال حاوله‌ای شرطی متصل میانی)

پایدار است

② کادر سخت

تکیه‌گاهی

ج: 6 + 6 = 12

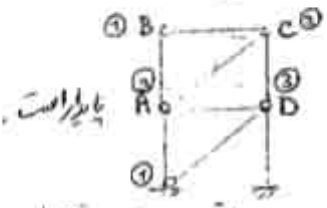
ع: 3 + 8 = 11

شرطی بیرونی

۱ ، ① درجه نامعین

www.khalvati.ir

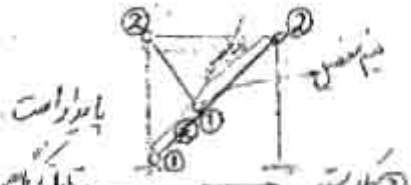
دستگاه فضایی داریم ← BCD, ABD, ABC (...)



(ماسه علمی + ① دهانه ناعلمی)
1 + 2 = 3
③ دهانه ناعلمی

* نکته ① * کمترین تعداد میله‌ای که در هر مورد باید حذف شود تا سازه قطعی شود، پس در مواردی که اعضای قطری تصویب ضربدری در دهانه‌ها قرار گرفته‌اند و در نقطه میانی اتصال سازه‌ای وجود ندارد (از دیدگاه رشد داده) برای شمارش درجه نامعینی تمام اعضای قطری را حذف، درجه نامعینی را حساب کرده و سپس آنها به تعداد اعضای قطری حذف شده به درجات نامعینی اضافه می‌کنیم (مثلاً BD را حذف می‌کنیم)

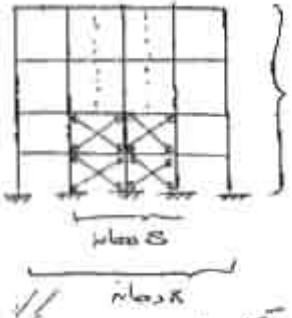
* نکته ② *



② کابل قطری مشخص، فقط دیگر ① مجهول ندارد و برای عضو قطری دیگری که به گره‌ای برخورد کرده در حل برخورد، یک نیروی متمرکز هم مجهودی آورد پس می‌توان آن را حذف کرد و به ازای آن ① مجهول اضافه کرد. سپس روابط تعادل قطری در سر معلق محاسبه خواهد شد.

ج: 6 + 6 = 12
ع: 3 + 6 = 9
ش: 3
③ دهانه ناعلمی

شکل، دریک ساب ضمنی n طبقه و k دهانه، تیر دهانه‌ها را با مهره مفصلی در سر معلق در تمام طبقات اجرا کرده، درجه نامعینی آن را محاسبه کنید.



شرطی نداریم، (بیرونی) ع: 3

ج: 3(K+1) + (n-1)(Kx3 + 2nS)
تعادل نیروها — کابل‌ها — مجهولات میله‌های ضربدری

* تعداد K دهانه: (K+1) طبقه داریم

هر میله 2 مجهول (2S) در هر طبقه ⇒ 2nS

چون گفتیم میله‌ها را حذف می‌کنیم دهانه‌ای آن 2 مجهول اضافه می‌کنیم پس اصلاً معادله شرطی نداریم چون تیر معلق نداریم.

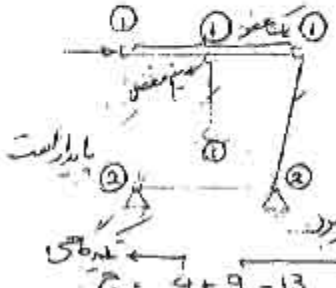
www.khalvati.ir

ع: 3

ج: $\frac{3k+3+3nk-3k+2n}{3nk+2n}$

④ درجه نامعینی خارجی کلی سه‌بعدی: $(n-1)$ برابر K برابر 3 یعنی $K(n-1)\times 3$

مثال: پایداری و درجه نامعینی داخلی



* اگر قید بشود که شکل متقارن است، یعنی سه خط تقارب ندارند.

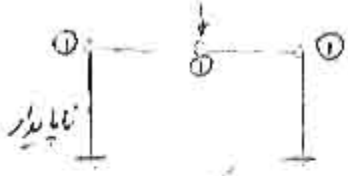
* اگر سه خط تقارب موازی باشند، در اثر بار جانبی وارده ناپایدار است.

ج: $4+9=13$

ع: $3+8=11$

$\frac{2}{2}$ درجه نامعینی

* در اثر بار نقطه وارده، می‌سقلمه و ناپایدار است. (سه مفصل هم استاتیکی ناپایداری ایجاد می‌کند.)



ج: 6

ع: $3+3=6$

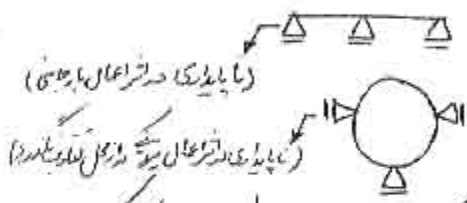
در واقع برای ناپایداری معادله مجهول نمی‌توان نوشت و به این دلیل نمی‌توان فهمید که ناپایدار است یا نه. دلیلی ندارد که اگر شکل متقارن نباشد، حتماً ناپایدار هست.

(معین، ناپایدار)

www.khalvati.ir

* شرایط ناپایداری

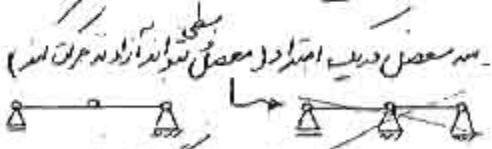
① استاتیکی (دینامیکی)
الف - نیروها موازی‌اند
ب - نیروها متلاقی‌اند



(ناپایداری در اثر اعمال بارهای)

(ناپایداری در اثر اعمال نیروی متلاقی از محل تلاقی‌شان)

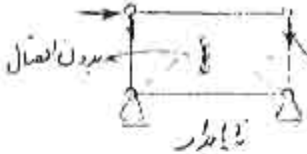
② هندسی (مربوط به هندسه سازه است)
الف - سه عضو در یک امتداد (معضل نمی‌تواند آزادانه حرکت کند)



ب - تعدادی از اتصالات مفصلی در کنار لوله‌ها

(بدون قید — یک قید اضافی — یک قید)

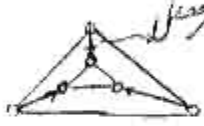
مثال) اگر به دستگاه زیر سه میلهٔ موازی هم وصل کنیم، پس بانک نیروی افقی، ناپایداری نمی‌شود چون هیچ قید افقی ندارد. حالت (ا - الف)



بدون اتصال

ناپایدار

پایدار ← (سه میله موازی هم) یک میله برای تعادل کم است



یک میله برای تعادل کم است

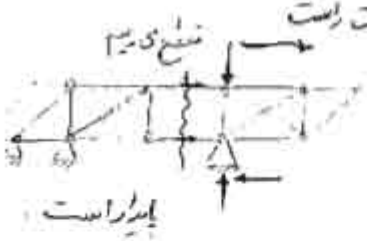
حالت (ا - ب) ناپایدار است زیرا:

ناپایدار است ← سه میله متقاطع (در یک نقطه) ← شرایط هندسی ناپایداری

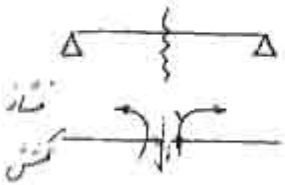
(پایدار است) هیچ شرط ناپایداری ندارد.

ناپایدار است به خاطر کادر که با چهار لوله معضل (۵)

www.khalvati.ir



* دیاگرام نیروهای داخلی :

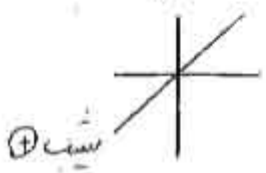


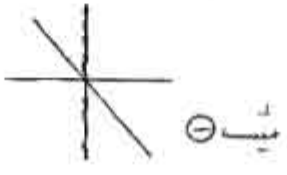
علامتهای ⊕

برای نیروهای داخلی (لنگر خ) از جهت عقربه ساعت استفاده می کنیم

قرارداد ها :

قرارداد شیبها :

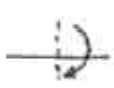




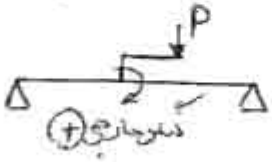
قرارداد بارخارجی :

بار گسترده رو به بالا ⊕

بار متمرکز رو به بالا ⊕



لنگر خارجی ساعتگرد ⊕



www.khalvati.ir

ابزار کار: معادلات تعادل در استاتیک

1) $\frac{dV}{dx} = q(x)$

2) $\frac{dM}{dx} = V(x)$

نتایجی که از این دو معادله گرفته می‌شود:

* 1) شیب منحنی برش (دیاگرام برش) در هر نقطه برابر است با بار گسترده در همان نقطه.

یعنی اگر روی تیر بار گسترده نباشد یعنی شیب برش صفر است (برش ثابت است)

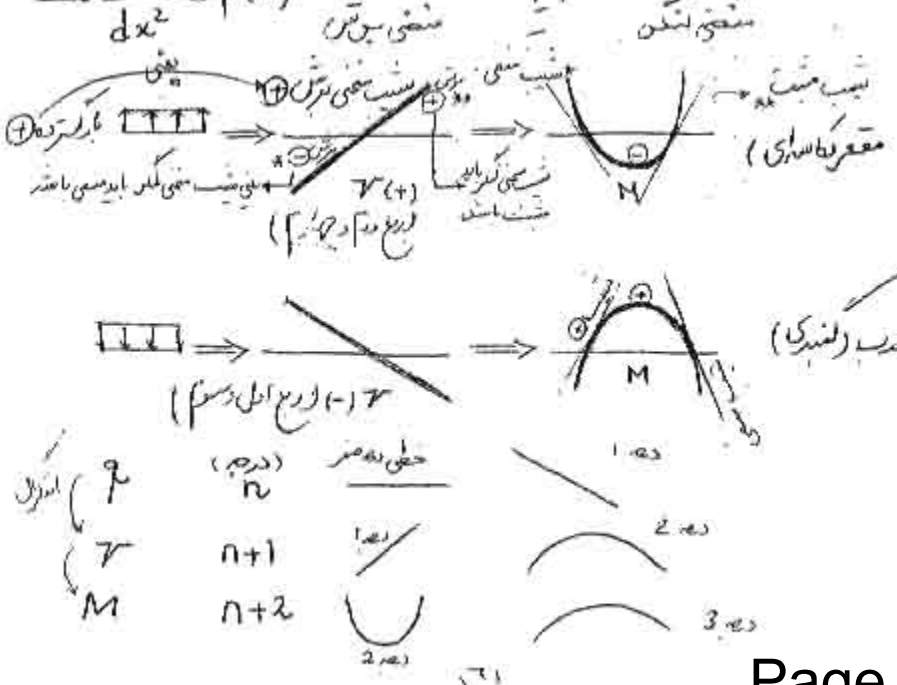
* 2) شیب دیاگرام لنگر در هر نقطه برابر است با مقدار برش در آن نقطه (در آن مقطع)

یعنی اگر جای برش ⊕ باشد شیب دیاگرام لنگر ⊕ است.

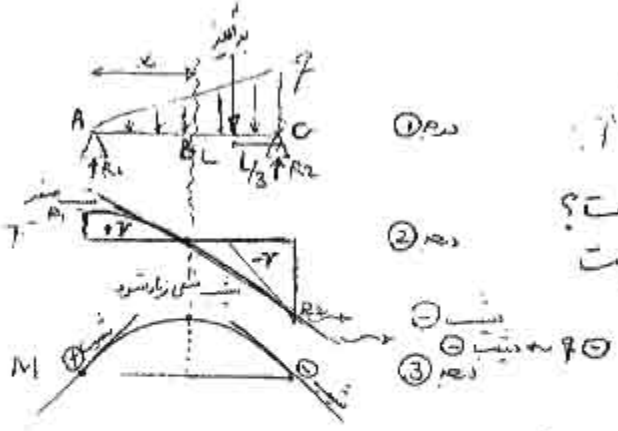
* 3) اگر در نقطه‌ای برش = صفر (برش تغییر علامت دهد) جای است که لنگر Max یا Min خواهد بود

4) اگر از رابطه دوم یک مشتق دیگر بگیریم:

$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)$



www.khalvati.ir



محل ماکزیمم Max (منفی) کجاست؟

- محلی که نیروی صفری وجود دارد است

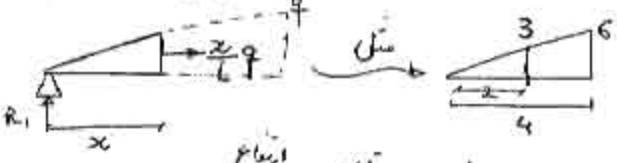
می آدیم $\Sigma M_C = 0$

$$R_1 \cdot L = \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{3} \rightarrow R_1 = \frac{qL}{6}$$

(بازو) ← محل اثر ← مقدار برد

پس باید جایی پیدا کنیم که برآیند مثلث کوچک به قاعده x، مساوی $\frac{qL}{6}$ شود چون باید برش در آن مقطع صفر باشد.

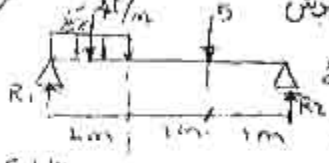
مساحت مثلث سورفتر:



$$\text{مساحت} : \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{L} \cdot x\right) = \frac{qL}{6} \rightarrow x^2 = \frac{L^2}{3} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}L \quad \left(x = L/\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

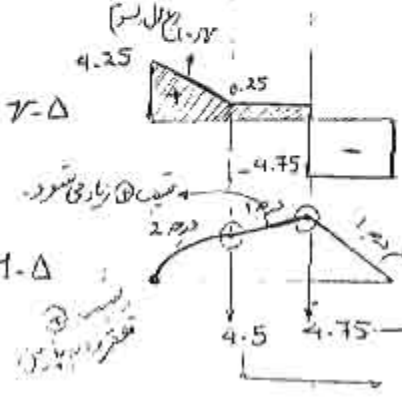
(ارتفاع، قاعده، عدد ثابت، سطح زیر منحنی q)

مثال ۱:



$$\Sigma M = 0 \rightarrow R_1 = \left(4 \times \frac{2}{2} \times 3\right) + (5 \times 1) = 17/4 = 4.25$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow R_2 = 4.75$$



تذکر: { * سطح زیر منحنی q = پرش (عددش) } { * سطح زیر منحنی V = لنگر (عددش) }

www.khalvati.ir

نتایج حاصل

$$\frac{dV}{dx} = -q \rightarrow \int_1^2 dV = -\int_1^2 q\,dx \qquad V_2 - V_1 =$$

* تغییرات برش بین دو مقطع برابر است با سطح زیر بار گسترده بین آن دو مقطع، با در نظر گرفتن علامت جبری آن.

$\ominus q \downarrow$ $\quad q \uparrow \oplus$

* تغییرات لنگر بین دو نقطه (دو مقطع) برابر است با سطح زیر دیاگرام برش بین آن دو مقطع با در نظر گرفتن علامت جبری

* بار متمرکز در دیاگرام برش یک جهش هم جهت و هم مقدار با بار ایجاد می‌کند، در دیاگرام لنگر یک نقطه شکست ایجاد خواهد شد.

مثال: $\sum M_{\cdot\cdot} = 0$ برای هر دو طرف هر مقطع دلخواه، بین کدام نیروها رابطه برقرار می‌شود؟

M نمودار — H نمودار

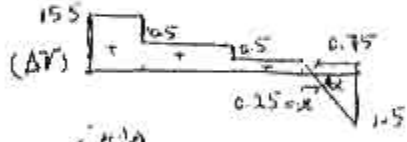
$\sum M_C = 0 \quad 2\times1.5 = 3 = RE\times2 \rightarrow RE = 1.5$ (قطعه سمت راست)

$\sum F_y = 5+10+2\times1 = 17 \quad RA + RE = 17 \rightarrow RA = 15.5$

$\sum M_C = 0 \rightarrow 15.5\times4 - 5\times1 - MA = 0 \rightarrow MA = 57\ t.m$ (قطعه سمت چپ)

$-MA + 15.5\times4 - 5\times2 + 5 = 0$

اگر دستگاه را برداریم: A — 5 — B ↓5 $\rightarrow MA = 57\ t.m$



M_{max}، x لازم است برای محل

$\tan\alpha = \frac{\text{سطح زیر بار بین دو مقطع}}{\text{فاصله دو مقطع}} = q = \frac{7.5}{x} = \frac{\text{ارتفاع}}{\text{طول}} \rightarrow x = \frac{V_{i=0}}{q}$

$0.5 + \frac{0.25\times0.5}{2} = M_{max}$ مساحت ذوزنقه بین دو مقطع +0.5

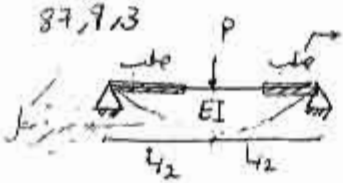
یا

$M_{max} = \frac{0.75\times1.5}{2} =$ مساحت مثلث بزرگ

(لنگر 26 با لنگر 5 جمع جبری) سطح زیر ... 26 ... 5 = 21

www.khalvati.ir

87,9,13



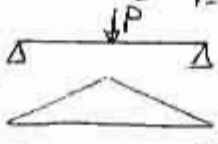
سختی ∞

تا این جا دیاگرام لنگر رسم شود.

در سختی ∞ ، لنگر دیاگرام $\frac{L}{2}$ قرار دهیم.

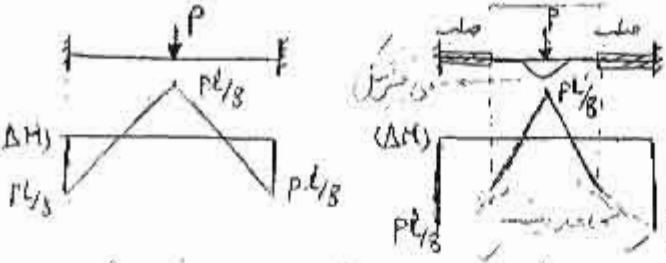
نقطه‌ی اعمال P هیچ تغییر مکانی نسبت به تکیه‌گاه‌ها ندارد.

پس قطاع با شکل زیر فرقی ندارد:



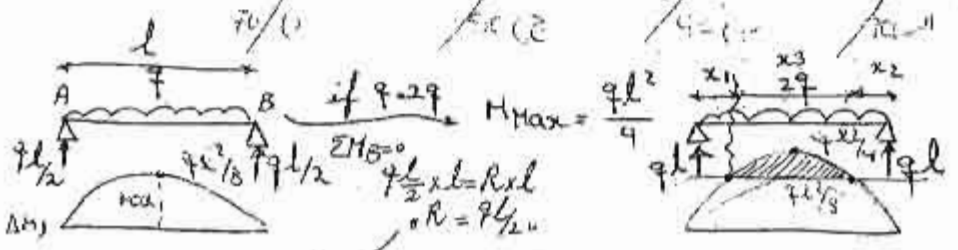
دیاگرام لنگر (ΔM)

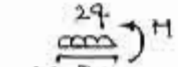
تذکر ★ در تیر با طول ثابت، سختی توزیع می‌شود



مثال ★ تیر یک سر گیردار تحت اثر بار گسترده‌ی یکنواخت q قرار دارد. دیاگرام لنگر خمشی را رسم کنید.

اگر صلبیت اردکی تیر ثابت فرض شود، تغییر صلبیت طول تیر را چه تغییراتی می‌دهد؟





ی خواهیم مقطعی را پیدا کنیم که M در آن ی شود (در تیر با بارگذاری جدید) $\frac{ql^2}{8}$

$$\rightarrow M = ql\cdot x_1 - 2q\cdot x_1\cdot\frac{x_1}{2} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\rightarrow Lx - x^2 = \frac{L^2}{8} \rightarrow 8x^2 - 8Lx + L^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{8L \pm \sqrt{64L^2 - 32L^2}}{16}$$

$$x_1 = \frac{13.6L}{16} = 0.85L$$

$$x_2 = \frac{2.4L}{16} = 0.15L$$

(با اصل x_1 و x_2، کدام است که باید انتخاب شود)

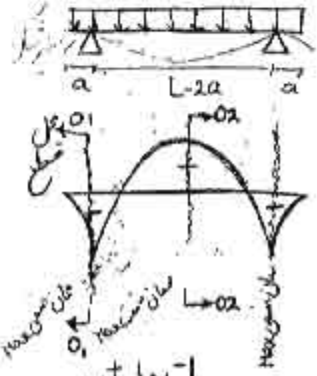
$$\rightarrow x_3 = 0.7L$$

www.khalvati.ir

تست: طول دهانه‌ی یک تیر ساده‌ی L واحد طول است. این تیر، با حرکت بار واحد متحرکی بر طول دهانه‌ی آن، به کدام فاصله از تکیه‌گاه سمت چپ، بیشترین لنگر خمشی را تحمل می‌کند؟ (بر حسب درصدی از طول)

الف) $\frac{1}{3}L$ ب) $0.15L$ ج) $0.2L$ د) $0.3L$

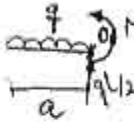
(دیاگرام‌های ساخت)



توضیح: ی مواضع Max به حداقل برسد سایرین باید لنگر ⊖ و ⊕ باهم برابر باشند چون اگر قله‌ها خیلی به هم نزدیک باشند لنگر ⊕ خیلی زیاد و برعکس پس جایی قرار می‌گیرد که باهم مساوی باشند (مثل مجموع دو عدد که می‌خواهند حاصل 10 داشته باشند که بهترین حالت 5+5 است)

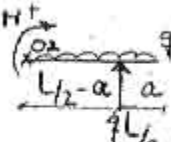
$M^+ = |M^-|$

۲ مقطع می‌بینیم در محل لنگرهای Max: (لنگر ⊕ در وسط) (لنگر ⊖ در تکیه‌گاه)



$q \cdot a \cdot a/2 = M^-$

$qa^2/2$



* لنگر حول O2

$M^+ = \frac{qL}{2}(L/2 - a) - \frac{qL}{2} \cdot L/4$

$= \frac{qL^2}{4} - \frac{qLa}{2} - \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8} - qLa/2$

$\rightarrow M^+ = |M^-| \rightarrow \frac{qL^2}{8} - \frac{qLa}{2} = \frac{qa^2}{2} \rightarrow 4a^2 + 4aL - L^2 = 0$

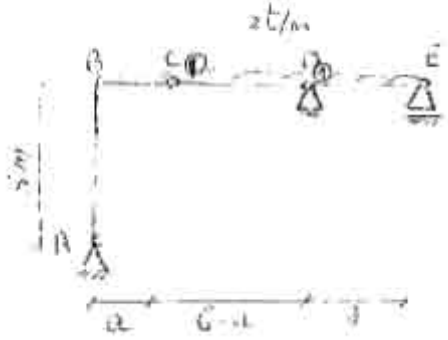
$a = \frac{-4L \pm \sqrt{16L^2 + 16L^2}}{8}$

$a = \frac{-4L \pm 4\sqrt{2}L}{8} = 0.2L$

{ فاصله از هر دو طرف $= 0.2L$
فاصله از هم‌دیگر $= 0.6L$ (وسط یعنی برای فاصله از هر تکیه‌گاه $0.6L$ است)

www.khalvati.ir

مثال ۱)



سازه پایدار درونی است.

در DE به علت ظاهری بودن تکیه پایدار متصل دارد

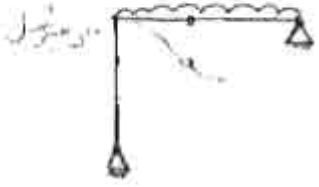
در ABCD نیز به علت نیرو بودن B، متصل C ناپایداری ایجاد می‌کند.

$$\begin{cases} C: 5 \\ E: 3+2=5 \end{cases}$$

سپس

طول a را طوری پیدا کنید که لنگر ⊕ در قسمت BCD برابر شود.

لنگر وسط DE (تیر دو سر مفصل است) $= ql^2/8$ که تأثیری در حل مسأله ندارد.



CD مثل یک تیر دو سر مفصل است که لنگر ⊕ $ql^2/8$ دارد. ①

BC مثل یک طره است پس لنگر ⊖ در این قسمت نداریم

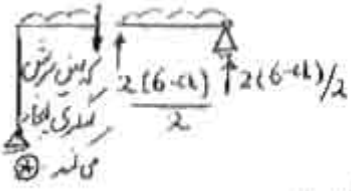
① تشخیص محل M^+ و M^-

② برش در مفصل C را پیدا می‌کند.

$$M^+ = \frac{2(6-a)^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

$$M^- = \frac{2 \times a \times \frac{a}{2}}{\text{لنگر}} + \frac{2(6-a)}{2} \cdot a$$

② لنگر مفصل بودن C، باعث می‌شود برش در C نصف شود.



$$M^+ = |M^-|$$

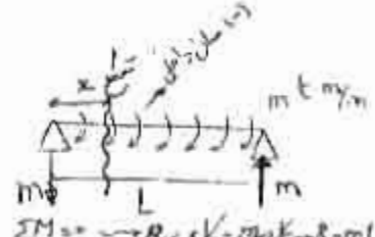
$$\frac{2(6-a)^2}{8} = a^2 + a(6-a)$$

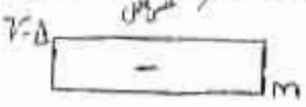
$$(6-a)^2 = (a^2 + 6a - a^2)4$$

$$a^2 + 36 - 12a = 24a = 0 \rightarrow a^2 + 36 - 36a = 0 \rightarrow a = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 144}}{2}$$

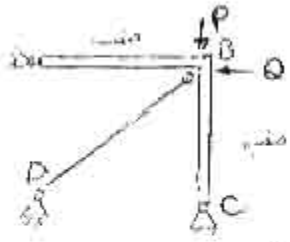
$$\rightarrow a = 35, \quad a = 1$$

www.khalvati.ir



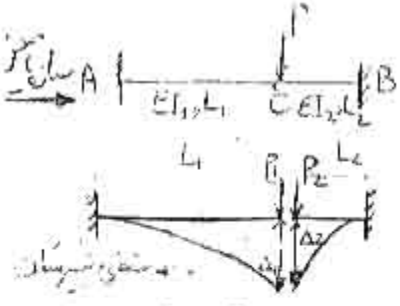


www.khalvati.ir



مثال: AB و BC هم از یک طرف صلب اند و
نیروی کوپل $F_{BD}=?$
به دلیل صلب بودن دو قطعه نیروها طوری وارد شود
(P و Q) تمام نیروها را دو قطعه جذب می کند، چون میله
باعین است، تمام نیروها را قطعات باستی ∞ جذب می کند $\Rightarrow F_{BD}=\infty$

* چون دو انتهای قطعه BD نسبت به هیچ چیز هیچ گونه تغییر مکانی نمی دهند (به دلیل آنکه دو قطعه دیگر کاملاً صلب هستند) نیروی محوری در این عضو صفر خواهد بود. یا به عبارت دیگر در یک سازه نامعین که نیرو باید به نسبت سختی توزیع شود، اعضایی که سختی ∞ دارند، تمام نیروها را جذب نموده و هم سطح صفر می شود.



مثال: سیستم خرپا مقطع AC صلب از نیروی خارجی P به صورت اعمال می شود. اگر بخواهیم

① باید تیر را به دو تیر تقلیل می کنیم و P باید به نسبت سختی تقسیم شود که نمی دانیم چقدر است پس آنها را P_1 و P_2 می نامیم

② برای حل نیاز به یک معادله شرطی داریم (Δ)

① $P_1+P_2=P$

② $\begin{cases}\Delta_1=\dfrac{P_1 L_1^3}{3EI_1}\\ \Delta_2=\dfrac{P_2 L_2^3}{3EI_2}\end{cases}$

$\Delta_1=\Delta_2 \rightarrow \dfrac{P_1}{P_2}=\left(\dfrac{L_2}{L_1}\right)^3\cdot\dfrac{EI_1}{EI_2}$

(حل مشابه گرفته) * طرف که هر نیروی بیشتری داشته

www.khalvati.ir

3- اصول استاتیکی و هندسی در تعادل‌ها

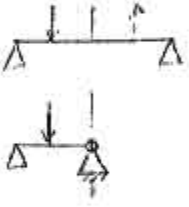
شرایط استاتیکی در تعادل:

الف- * در تعادل مستقیم روی مرکز تعادل $V=0$ (برش برابر با صفر) و (لنگر Max) و

* در تعادل معکوس روی مرکز تعادل $H=0$ (لنگر برابر با صفر) که به آن نقطه عطف می‌گوییم

ب- در سازه نیمه ارگ ساده با تعادل مستقیم روی محور تعادل تکیه‌گاه، بردار عکس‌العمل‌ها در نظر گرفته می‌شود، مگر آنکه در سازه اصلی در آن نقطه یک تکیه‌گاه داشته باشیم که تکیه‌گاه بردار کامل‌ها یا کنترین آن خواهد شد.

ج- در بارگذاری با تعادل معکوس روی مرکز تعادل $H=0$ و سازه نیمه آن باید به صورت زیر باشد:



شرایط هندسی تعادل:

* در تعادل مستقیم روی مرکز تعادل بیشترین تغییر شکل صفر ($\delta=0$) و تغییر مکان Max خواهد بود.

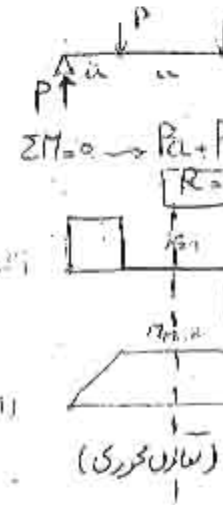
* در " معکوس " " ($\Delta=0$) تغییر مکان صفر خواهد بود.

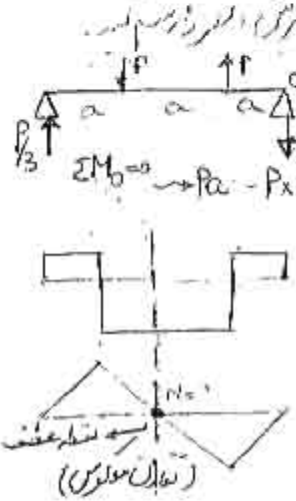
www.khalvati.ir

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{P_1 \cdot L_1}{P_2 \cdot L_2} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \qquad \text{اگر } ? = \frac{M_A}{M_B}$$

(بافرض اینکه EI ها مساوی باشند)

سختی $K = \frac{P}{\Delta}$





* اصول تعادل
  1- سازه متعادل است
  2- بارگذاری

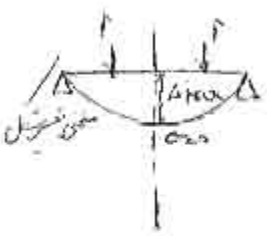
تعادل مستقیم (محوری)

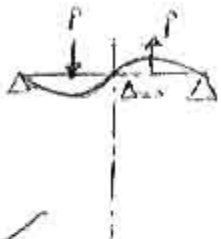
تعادل معکوس (مرکزی)

محوری

تذکر: در یک سازه متعادل اگر بارگذاری تعادل مستقیم داشته باشد، دیاگرام لنگر نیز تعادل مستقیم خواهد داشت و برعکس معکوس اگر بارگذاری تعادل معکوس داشته باشد، لنگر نیز تعادل معکوس داشته و برعکس مستقیم خواهد بود.

www.khalvati.ir

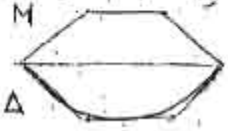


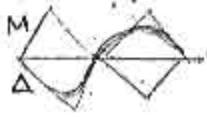


* نقطه در تیرها:

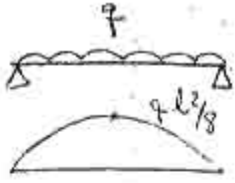
* معمولاً دیاگرام M را برعکس کشیم، و گوشه‌های آن را fillet کشیم، سپس شکل را بدست می‌آوریم

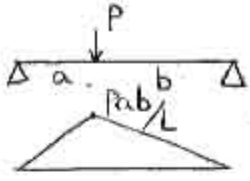
اگر دیاگرام گشتاور را نسبت به محور افقی قرینه کنیم پس از حذف گوشه‌های تیز، بطور شماتیک همین شکل ارتجاعی تیر را بدست می‌آوریم

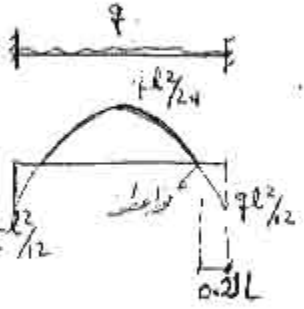


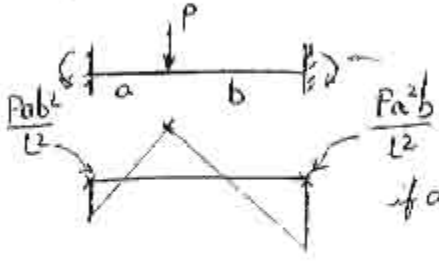


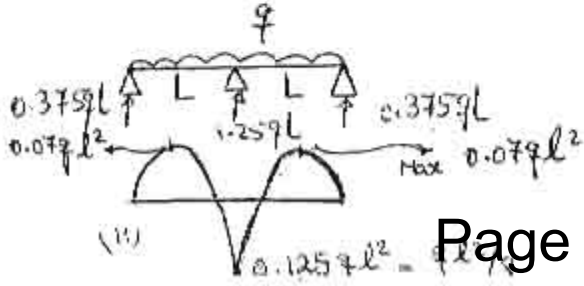
شکل‌های کلی











www.khalvati.ir

توجه: از بین دو تیر زیر اگر صرفاً معیار طراحی براساس مقاومت را در نظر بگیریم، در مطلق حداکثر لنگر ایجاد شده یکسان است و متعاقباً این دو یکسان خواهد بود ولی تیر دو دهانه نامعین به دلیل وجود بازپخش لنگر می تواند برای لنگر کوچکتری طراحی شود (با سه شرط خاص)

«87/9/17»

«حل چند مثال برای تعادل نهایی»

مثال ۱) بارهای متمرکز وسط دهانه اعمال می شوند. یک تیر یکسر گیردار با دهانه نامعین با دو دهانه مساوی

$M_A = ?$
$M_B = ?$
$R_A = ?$ ، $R_B = ?$

با استفاده از تعادل می خواهیم مطلوبست:

توضیح: سازه متعادل و بارگذاری نیز متعادل است. روی محور تیر

نکته ۱: تغییر مکان مجاز اصل اساسی می گذاریم و چون زیرش

نکته ۲: تعادل به نکته ۱ برگردانده شود.

در نکته ۲ سازه حاصل متعادل و بارگذاری نیز متعادل ما توانیم

مثل قبل، روی محور تعادل نکته ۱ برگردانیم.

از روی B جدا کردیم. دقت کنید هم متصل شوند. گیردار روی B با هم جمع

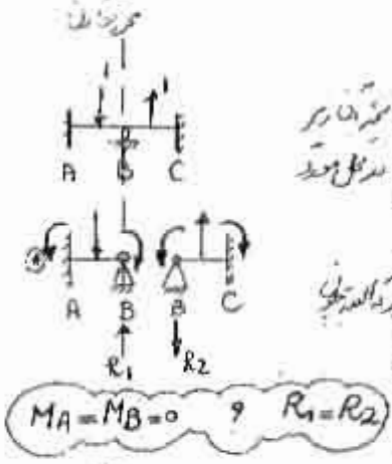
می شوند و عکس العمل های B با هم جمع می شوند.

$$M_A = M_B = \frac{PL}{8} = \frac{1 \times 2}{8} = \frac{1}{4}\ t.m$$

$$R_A = \frac{1}{2} = 0.5\ ton$$

$$R_B = 2(0.5) = 1\ ton$$

www.khalvati.ir



مثال) توضیح) چون سازه و بارگذاری با تقارن داریم و همان تقارن در مجموعه‌ی معادل وجود خواهد داشت فقط نیمه‌ی معادل را رسم می‌کنیم.

از روی B جدا کردیم، در این حالت تکیه‌گاه جمع می‌شود که العبه‌ی معادل است $M=0$ و عکس العمل‌ها هم مثل هم می‌شوند

نکته: برای محاسبه‌ی نیروهای داخلی در محور تقارن، اگر تقارن هندسی داشته باشیم، مرتبا باید نگاه جمعی کنیم یکی از نقطه‌ها را در نظر می‌گیریم.

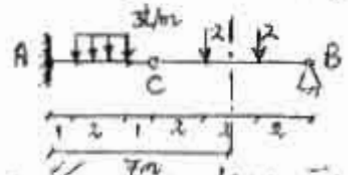
در حالتی که تقارن عکس دارد، نقطه‌ها را باید جمعی کنیم و یکی از نقطه‌ها را در نظر می‌گیریم.

مثال) (سازه متقارن است) مطلوبست نیروی P، M_A؟

توضیح) سازه متقارن است، از وسط (محور تقارن) نصف می‌کنیم تعادل هندسی است، بعد کل محور تقارن گیردار فرض شده می‌گذاریم و این عمل مشتق گیری داریم تعادل گیردار حل می‌شود.

$$M_A = \frac{ql^2}{12}$$

$$P = R_1 + R_2 = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} = ql$$



مثال) برش‌بندی در فاصله 7m از نقطه A چقدر است؟

توضیح) اگر از روی مفصل C سازه را جدا کنیم، نقطه سمت راست (CB) مانند تیری دو سر مفصل است که بارگذاری آن تقارن هندسی دارد، پس برش روی وسط تیر را خواهد داشت (محاسبه این نقطه دقیقا در وسط 7m فاصله A می‌باشد). نقطه سمت چپ (AB)، بارگذاری روی آن نقطه‌ای است و سازه متقارن نیست

Page 23

www.khalvati.ir

خرپاها

خرپا که باید دارای ۴ شرط زیر باشد:

① اعضا مستقیم باشند
② اتصالات مفصلی باشند
③ نیروها فقط به گره اعمال شوند
④ غیر شکل کوچک باشند.

هم M دارد
هم M ندارد
(خرپا نیست)

اعضا مستقیمی - دو سر مفصلی
فقط نیروی محوری دارند
(خرپا)

سازه هایی که یکی از ۴ شرط فوق را نداشته باشند سه تا هستند

- روشهای تحلیل برای خرپا: ① روش گره ② روش مقطع / برش

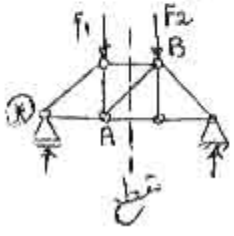
- روش گره: دو معادله ای که می نویسیم:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

همانه از گره‌ای شروع می‌کنیم که فقط دو عضو به آن متصل باشند که با دو معادله، دو مجهول را پیدا کنیم

آخرین گره، گره کنترلی است. اگر آخری با بقیه جور در نیامد یعنی اشتباه شده است. که این روش مناسب‌ترین روش برای تحلیل کل خرپا است. گاهی اوقات سؤال یک عضو خاص سؤال است مثل $F_{AB}=?$

گاهی مجبوریم از روش گره استفاده کنیم، ابتدا باید از گره دو عضوی شروع کرده و A و B را بسم بس مناسب‌تر در این تحلیل عضوی خاص از یک عضو روش مقطع است.



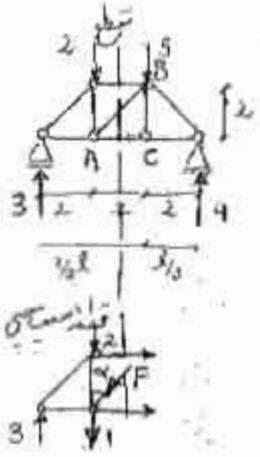
خرپاهایی که دارای گره دو عضوی نباشند به آن خرپای نامعین گویند که

البته قابل حل است یعنی معادله نامعین خرپا نیست.

www.khalvati.ir

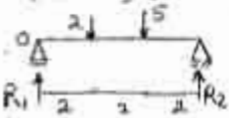
روش مقطع: یعنی مقطعی می‌زنیم که از عضو مورد نظر عبور کند.

مثال: F_{AB} از جای زیر چقدر است؟



توضیح: روش مقطع = روشی برش که برای المان‌های خاصی استفاده می‌شود. یعنی اگر مطلوب (FAC) بود دیگر از روش برش گره استفاده می‌کنیم.

روش ۱) برای بدست آوردن عکس‌العمل‌ها، جرم را مانند یک تیر در نظر گرفته



و حل می‌کنیم

$\sum M_O = 0 \rightarrow 2\times2 + 5\times4 = R\times6$

$\frac{(4+20)}{6} = R \rightarrow R_2 = 4$

$\sum F_y = 0 \rightarrow 2+5 = 4+R_1$

$7-4 = R_1 \rightarrow R_1 = 3$

روش ۲) به سراغ برش 2.5 کردیم. 2 تا 5 این جا مطرح است

برش می‌زنیم، ③ حال برای عکس‌العمل‌های R_2 و R_1 این

منطقه‌ها را می‌چسبیم به اضافه:

$R_1 = 2 + \bigcirc$

$R_2 = 2 + \bigcirc$

حال ③ باقی مانده را بر حسب R_2 به $\frac{2}{3}$ می‌چسبیم و بر حسب

R_1 به $\frac{1}{3}$ می‌چسبیم $R_1 = 2 + (\frac{1}{3}\times3) = 2+1 = 3$

$R_2 = 2 + (\frac{2}{3}\times3) = 2+2 = 4$ (چون R_2 از R_1 بزرگتر است)

(چون کلاً مراحل یکسان بودند، از روش ۲ می‌توان استفاده کرد)

* اگر بحث عکس‌العمل‌ها را

چسبیدن مثلی مطلوب است: $F_{AC} = ?$

نزدیکه است بین، B خارج

$\sum M_B = 0$ بررسی می‌شود.

$\sum M_B \rightarrow 3\times4 - 2\times2 - F_{AC}\times2 = 0$

$F_{AC} = 4$

حل ۳

$\sum F_y = 0$

$\uparrow 3 + (2 + \textcircled{1}\downarrow) = 0$

برای اینکه حاصل صفر باشد

باید ① رو به پایین (↓) در نظر بگیریم

پس می‌بایست یک مولفه قائم در نظر بگیریم که نقطه نیروی مورب F می‌تواند مولفه قائم داشته باشد که این مولفه قائم $1\tan$ می‌باشد. همینطور:

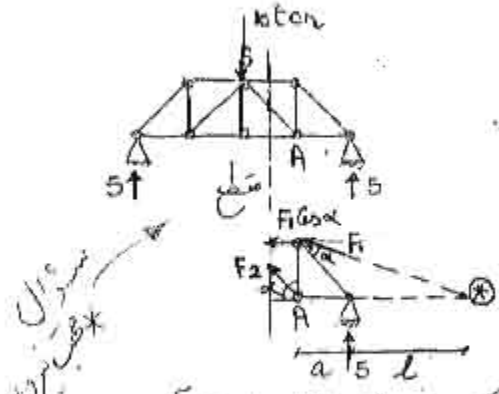
$\cos\alpha = \frac{1}{F}$ برای تقابل زاویه و وتر

$F = \frac{1}{\cos\alpha}$ $F\cos\alpha = 1$ قطعه مجهول

www.khalvati.ir

مثال: $F_{AB}=?$ (برای عضو گمی کشان رسم شده)

توضیح: در ادامه حل، تکیه بیشتر خواهد بود.



روش ① حول نقطه ⊛ (نقطه خارجی) عمان می‌گیریم.
مولفه افقی F_2 ($F_2\cos\alpha$) و F_1 از این نقطه می‌گذرند. پس برآیند عضو قائم روی گره A برابر است با آن.

$\sum M_{⊛}=0 \quad F_2\sin\alpha(l+a)+5(l)=0$

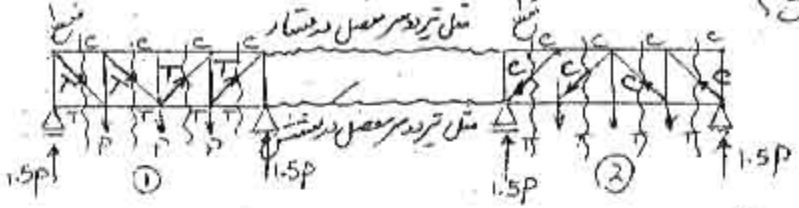
برابر است با آن.

$F_2\sin\alpha$

* (l) از تالس برابر است با آن.

و یا روش ② از تعادل حول A می‌توان حل کرد. و بنابراین $F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2=5$

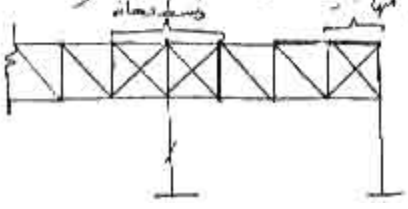
مثال: برای احداث خط‌های یک پل دکمه‌ای زیر بسته شده است. کدام یک از نظر تحمل بار مناسب‌تر است؟



1.5P ی هر عضو مولفه قائم از نیروی مورب آن را تامین خواهد کرد. جهت این مولفه قائم باید رو به ↓ باشد پس عضو مورب کششی است. بر عضو کششی T می‌شوند.

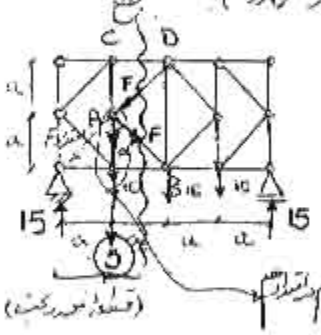
عضو تیر در شکل ② نیز 1.5P ای می‌طلبد که مولفه قائم نیروی مضربه فشاری آن را تامین خواهد کرد.

* در پل‌های فلزی، کششی تر است پس ① بهتر است. در پل‌های عابر پیاده چون عبور و مرور کمتر است، می‌توان از وسط ⊠ استفاده کرد که هم ⊂ دارد هم T و اندکی سبک‌تر می‌شود.



www.khalvati.ir

مثال) در خرپای مقابل میله‌های روبا 45° هستند. F_{AB}=؟ (الماس بورت)



برای حل از روش مقطع استفاده می‌کنیم.

① $15\uparrow + 10\downarrow + 5\downarrow = 0$ (5 را رد می‌کنیم)

② A ← از تقابل لنگر $\Sigma F = 0$

③ $2F_{CD}\sin 45 = 5$

$\frac{2F\sqrt{2}}{2} = 5$

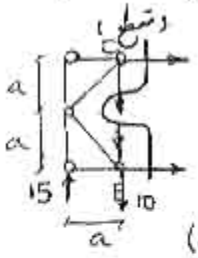
$F = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

* نیرو جهت مولفه قائم F: جهت مخالف و مساوی مولفه قائم 5 تن

(خرپای K)

مثال) F_{CD}=؟ (الماس غیرمستقیم) (خرپای با عضو (خرپای K)

از مقطع معروف خرپای K برای حل استفاده می‌کنیم، این مقطع معروف، مقطعی است که از سه عضو قائم و افقی می‌گذرد.

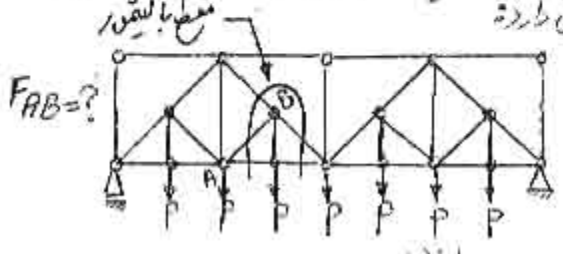


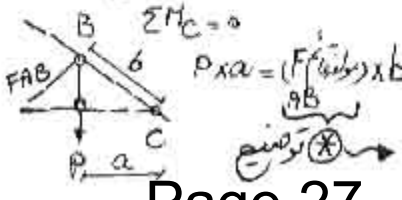
حول E ممان می‌گیریم که یعنی همه نیروها از E می‌گذرند و فقط F_{CD} باقی می‌ماند.

$\Sigma M_E = 0$ (تقابل ممان‌ها حول E) ← $15 \times 2a = F_{CD} \times 2a$

$F_{CD} = 15/2 = 7.5$

مثال) (خرپای با لنگر) خرپایی است که ارتفاع زیادی دارد که باعث می‌شود طول اعضای قطری زیاد شود. که چنین علت قیدی از وسط آن می‌گذرد و برای جلوگیری از خیز تیر زیر قید از تیر زیرین تا گره قید دوم می‌شود که این خرپا نیز مقطع معروفی دارد:



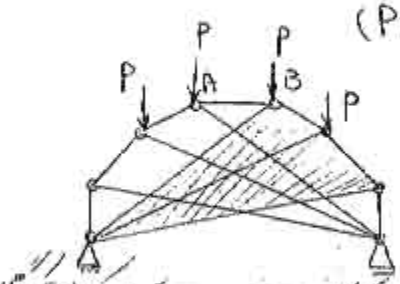


Page 27

www.khalvati.ir

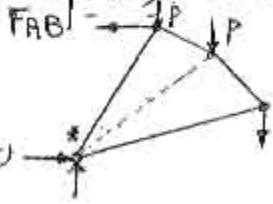
توضیح: یعنی اگر زاویه 90° باشد می‌توان نوشت $AB \perp BC$ ←

$(P \times a = F_{AB} \times b)$



مثال) $F_{AB} = ?$

مثلث مشخص شده را کاملاً جدا می‌کنیم.



در محورهای قطبی بررسی می‌کنیم.

(عضو بالای این تکیه‌گاه پرسش تصویر شده در جلسه‌ی قبل است)

(دیده می‌شود)

$\Sigma M^*_{=0}$

اعضاء صفر بررسی ❖ قبل از تحلیل خرپا:

می‌توان اعضایی که بی‌نیاز صرفاً از خرپا حذف کنیم.

حالت اول) اگر دو عضو گره‌ای متصل نشوند، و یک راستا باشند و بررسی به آن گره اعمال نشود، آن عضوها صفر بررسی خواهند بود. (معمولاً در پرسش‌های خرپا)

اگر بررسی به این گره اعمال نشود و امتدادی از این دو عضو باشد، قائماً عضو

مثال حذف متصل شده و عضو دیگر صفر بررسی خواهد بود.

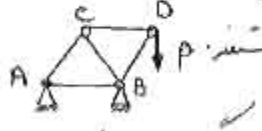
www.khalvati.ir

حالت دوم) اگر دو عضو در یک امتداد باشند و عضو سومی با امتداد یکی از آن دو به آن گره متصل شود، به شرط آنکه نیروی یک گره اعمال نشود، عضو سوم صفر نیروی خواهد بود. (عضو میانی = صفر نیروی)

نیروها همگی برابری کنند

حالت سوم) اعضائی که در سه راستا نسبت به هم هیچ گونه جابجایی نداشته باشند، صفر نیروی می باشند.

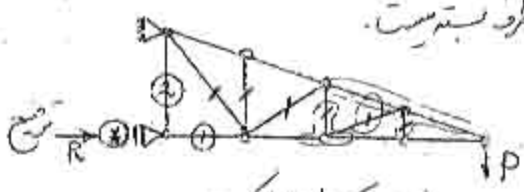
مثال) مقدار نیروی عضو AB را در شکل زیر بدست آورید.



$F_{AB} = ?$

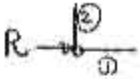
$F_{AB} = 0$ عضو AB از دو طرف بسته شده است، پس هیچ گونه جابجایی ندارد، پس

مثال) شکل زیر در حالت تعادل است. چند عضو صفر نیروی در این هرباد وجود دارد؟



⊗ توضیح: تکیه گاه غلتکی است یعنی عضو ② از دو طرف بسته نیست.

و R عکس العمل تکیه گاه ها می باشد:



دو عضو به یک گره متصل اند و نیروی آن گره مساوی صفر است یکی از اعضا وارد شده پس عضو دیگر، یعنی عضو ② ، صفر نیروی است. (حالت اول)

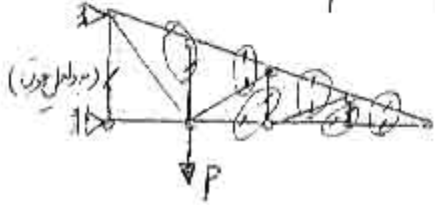
⑥ صفر نیروی: عضو ⑦ حالت ②

① صفر نیروی: حالت ①

7 تا عضو صفر نیروی هستند.

مثال) در شکل زیر اعضای صفر نیروی چند تا هستند.

چند تا از آنها هم صفر نیروی هستند غیر از مواردی که می ماند که بدون از P (وارد شده) هیچ نیروی داخلی در اعضاء وجود ندارد.



www.khalvati.ir

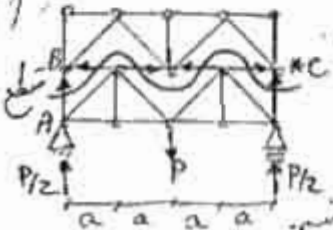
دلایل استفاده از اعضای صفر نیروی در سازه:

خط تأثیر شکل هندسی، افزایش درجه نامعینی و حالتهای مختلف بارگذاری محدودیتهایی هستند که اعضای صفر نیروی را در سازه می‌گذاریم.

* تکیه‌گاه غلتکی: معمولاً در سرماهای زمستانه برای جلوگیری از یخ‌زدگی، دریاچه‌ها یخ آب می‌شود، یخ‌ها در اثر سرما منبسط می‌شوند و فشار زیادی به پایه‌ها وارد می‌کنند. در طراحی این تکیه‌گاه‌ها حرکت افقی داده می‌شود تا این فشار را خنثی کند.

مثال) اگر حداکثر نیروی که عضو AB تحمل می‌کند 10 kN باشد، حداکثر نیروی P چقدر است؟ (همه فاصله‌ها برابر a هستند) (خط‌های K)

حل مثال: حل C عمل می‌کنیم که اکثریت نیروها از این نقطه می‌گذرند.



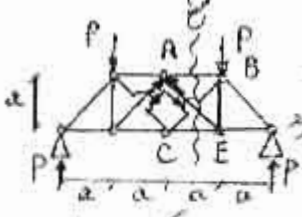
$$\sum M_C = 0 \rightarrow P \times 2a - P/2 \times 4a - F_{AB} \times 4a = 0$$

$$\rightarrow F_{AB} = 0$$

یعنی هیچ محدودیتی وجود ندارد و هر P می‌خواهیم می‌توانیم وارد کنیم.

توجه * عضوی پیدا کردیم که هیچ یک از حالتهای 3-2-1 صفر نیروی را ندارد ولی نیروی آن صفر است.

مثال) F_{AB}=?



اگر متقطع بزنیم در حالت کلی همه‌ی اعضا را قطع می‌کنیم. گره (A)، عضو فنری دارد که در جهت عمود نیرو باید باشد در نتیجه نیرو صفر است.

نیروی وارد به گره ← (خروج از گره)

نیروی وارد به گره → (ورود به گره)

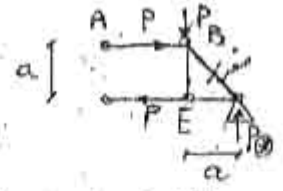
نیروی وارد به گره ← (خروج از گره)

نیروی وارد به گره → (ورود به گره)

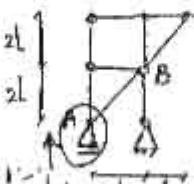
www.khalvati.ir

که چه بالا و چه پایین باشند نیروی وجود ندارد که آنها را در وضعیت قائم راضی کند. پس باید صفر باشند یعنی نیروی F با ساقهای متصل صفر است. همین طور برای نقطه ©.

* توجه * اعضای قطری این خرپا که به گره (A) می رسند، به دلیل تقارن باید نیروهای برابر و هم جهت داشته باشند ولی در این حالت برآیند این نیروها در امتداد قائم حتی صفر و تعادل گره (A) تأمین نمی شود. لذا باید هر دو آنها صفر باشند، تا هم تقارن رعایت شود هم تعادل گره. بعد از توضیحات فوق، حالا به سراغ حل زده شده می رویم و $\Sigma M_E=0$ می نویسیم



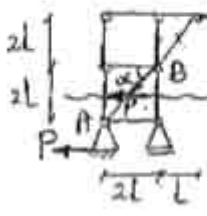
$\Sigma M_E=0 \rightarrow F_{AB} \times a = P \times a \rightarrow F_{AB}=0$



سوال اختیاری تمرین ← صفر

$F_{AB}=0$

مثال) $F_{AB}=?$



* سوال *

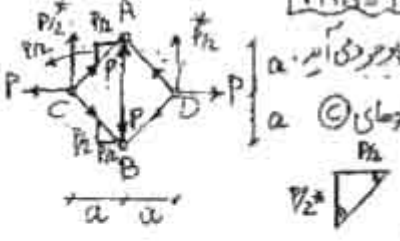
* جهت نیرو بدلخواه فرض کنید

$F_{AB}=\frac{P}{\cos\alpha}$

(رسم بارجند)

مثال) $F_{AB}=?$ $F_{AB}=P$

توضیح: از دو طرف می کشیم با نیروی P پس در AB مساوی به وجود می آید.



نیروی افقی P، باعث دو نیروی افقی $P/2$ در گره های © و (D) می شود. به دلیل تقارن و تعادل یکسان نیروی قائم هم $P/2$ می شود.

هر دو طرف $P/2$، افقی و هر دو طرف $P/2$ قائم داریم یعنی جمعاً P افقی در © و (D) به آنها متصل می شوند و P های قائم برای تعادل گره (A) و (B) مستلزم آن است که نیروی $P/2$ در AB باشد.

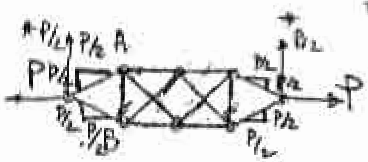
$P/2 + P/2 = P$ حال یک عضو قائم داریم و $F_{AB} = P/2$

www.hp.com/products/hprenew

www.khalvati.ir

مثال ۱) مقدار نیروی عضو AB را حساب کنید. FAB=?

$F_{AB} = P/2$



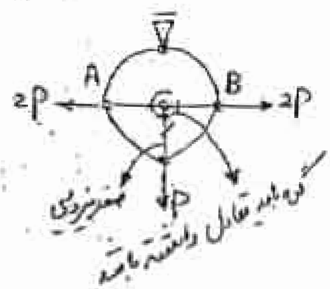
توضیح:

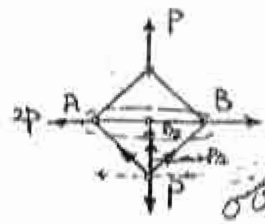
نیروی تمام اعضای وسط مثلثی صفر اند به دلیل تقارن شکل

از دو طرف P داریم، نقطه تقسیم داریم

$P/2 + P/2 = P$

تقسیم در عضو ← $P/2$ ← $P/2 = F_{AB}$





مثال ۲) FAB=?

توضیح:

ابتدا از دو طرف عضو کشیده می‌شود ← 2P نیروی کششی

حال از بین یک ... (مستقیم)

از دو طرف به عضو فشار وارد می‌کند ← P نیروی فشاری ($P/2+P/2$)

P نیروی کششی

www.khalvati.ir

خط تأثیر

87/9/24

خط تاثیر: منحنی خط تاثیر بیانگر تغییرات یک تابع مشخص در یک نقطه مشخص هنگام عبور بار متحرک واحد بر روی سازه می باشد.

* بار واحد بی بعد در حال حرکت است.
* مقطع ثابت است.
* توابع ثابت عبارتند از: P, M, V
* عرض: مقدار تابع در محل اثر بار واحد برای مقطع ثابت

- تفاوت دیاگرام و خط تاثیر:

دیاگرام — مقطع متغیر / بار ثابت

خط تاثیر — مقطع ثابت / بار متحرک

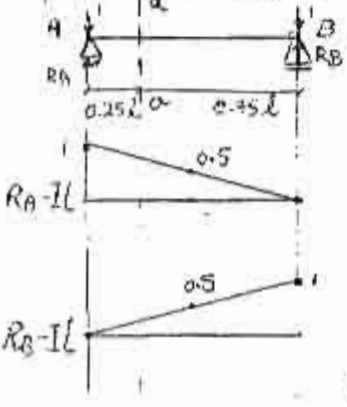
- خصوصیات خط تاثیر:

① از نوع بارگذاری مستقل است
② در سازه معین، خط مستقیم است.
③ در سازه نامعین، منحنی (حداکثر ۳ تا) است.

- روشهای خط تاثیر: ① تعادل (کلی) ② تغییر مکان (کلی)

* (روش کلی)

مثال: برای تیر زیر مستقل از روش کلی، خط تاثیر رسم کنید.



توابع: M_{a-a} ، V_{a-a} ، R_B ، R_A

برای R_A، بار واحد ① روی تیر از A تا B حرکت می کند. اگر بار واحد روی A باشد $R_A=1$ / اگر بار واحد روی B باشد $R_A=0$ / اگر بار واحد وسط تیر باشد $R_A=0.5$

برای R_B، بار واحد روی A $\rightarrow R_B=0$ / بار واحد روی B $\rightarrow R_B=1$

(عکس الاثل ها)

Page 33

www.khalvati.ir

تذکر: در خط تاثیر عکس العملهای تکیه گاهی نکات زیر وجود دارد:

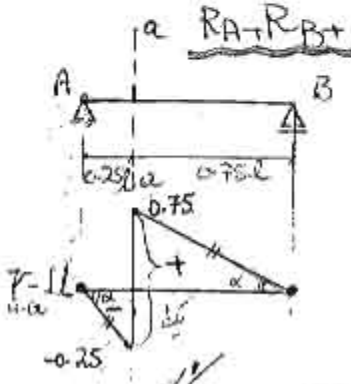
① عرض خط تاثیر در نقطه ای که خط تاثیر آن را رسم می کنیم برابر با یک است. در سایر نقاط عرضها برابر یا کمتر از یک است.

② مجموع عرضهای خط تاثیر عکس العملهای تکیه گاهی در هر وضعیت بارگذاری همواره برابر یک است.

$R_A + R_B + \dots = 1$

(برش)

برای V_{a-a}، ابتدا بار واحد را روی A می گذاریم و قطع می زنیم:

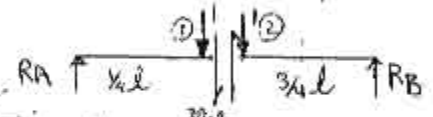


در این حالت چون تمام بار واحد توسط تکیه گاه A رو به بالا تیر وارد می شود

در نتیجه: $V_{a-a}=0$

② حالا بار واحد را روی B می گذاریم و قطع می زنیم: در این حالت چون تمام بار واحد توسط تکیه گاه B به پایین وارد می شود و تیر وارد نمی شود در نتیجه: $V_{a-a}=0$

اندازه عرض خط تاثیر باید خط تاثیر را صاف و مستقیم باشد و قطعاتی را رسم کند که بار واحد روی تیر حرکت کند و از قطع برش خارج نشود. در این حالت کمی قبل و کمی بعد از قطع بار واحد را قرار می دهیم



$R_A = 0.75$
$R_B = 0.25$
} * به نسبت عکس طول ها

$\frac{R_A}{R_B} = \frac{0.75\ell}{0.25\ell}$

حال در نقطه سمت چپ (بعد از قطع) داریم: $\sum F_y = 0 \xrightarrow{①} R_A = V_{a-a} + 1 \rightarrow V_{a-a} = -1 + 0.75 = -0.25$

$-0.25 = V_{a-a}$

حال کمی بعد از قطع بار واحد را داریم: $\sum F_y = 0 \xrightarrow{②} R_A - V_{a-a} = 0$ (نیروی محوری نداریم)

$0.75 = V_{a-a}$

www.khalvati.ir

تذکر: در خط تاثیر برشی هر مقطع دو خط زیر وجود دارد:

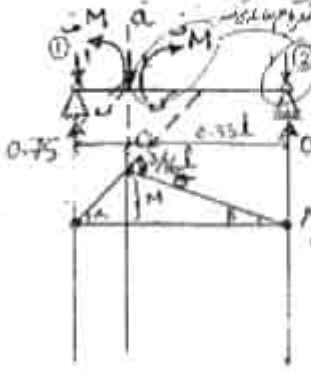
① کل شکستگی ایجاد شده موازی با یک است.

② نیمی از خط تاثیر در طرفین مقطع که خط تاثیر را برای آن رسم می‌کنیم، باید موازی باشند یعنی خطوط (۱) با هم موازی اند ← زوایا نیز با هم برابر است که اگر نیمی از آن مساوی یک شود، زوایا 45° هستند.

$tg\alpha = \frac{\text{شیب}}{} = \frac{0.25}{0.25\ell} = 1/\ell$

$tg\alpha = \frac{\text{شیب}}{} = \frac{0.75}{0.75\ell} = 1/\ell$

③ در خط تاثیر عرض حرکت می‌دهیم. برش در (a-a) اصلاً برابر یک نیست. کمی مثلاً 0.25ℓ - دیگری 0.75ℓ می‌باشد. (آنالیز)



① بار واحد روی A، تمام بار توی تکیه‌گاه می‌رود و بازوی لنگر صفر است ← $M_A = 0$

پس لنگری ایجاد نمی‌کند.

② بار واحد روی B، تمام بار توی تکیه‌گاه می‌رود و بازو صفر است ← $M_B = 0$

پس لنگری ایجاد نمی‌کند.

- حال بار واحد را روی خود مقطع می‌گذاریم. زیرا کمی قبل و بعد مقطع فرق ندارد، مقطع می‌بریم (همان مقطع a-a) و لنگرها را حساب می‌کنیم که لنگرهای داخلی هر دو ⊕ هستند.

$\sum M_{(a-a\text{ طرف چپ})} = 0$ (جهت فرضی ⊕) ←

- نقطه چپ: $0.75 \times 0.25\ell = M$
- بازو × بار = M
- نقطه راست: $0.25 \times 0.75\ell = M$

$\rightarrow M_{a-a} = \frac{3}{16}\ell$

تذکر: میزان دوران (زاویه چرخش):

$\theta = 1$ Rad، $\alpha + \beta = \theta \rightarrow \alpha + \beta = 1$

جمع دو زاویه داخلی تیر خاص

$tg\alpha = \frac{M}{0.25\ell}$ ، $tg\beta = \frac{M}{0.75\ell}$ ← M بدست می‌آید.

www.khalvati.ir

* (روش کلی) برای رسم خط تاثیر با سه مرحله داریم:

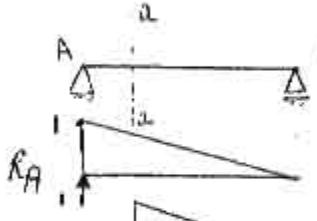
① حذف عامل متقارم در راستای حرکت تابع مورد نظر
② اعمال نیروهای متناظر با تابع حذف شده در جهت ⊕
③ رسم تیر مشکل ساده تحت اثر این نیروها

* معنی بدست آمده بطور شماتیک خط تاثیر تابع مورد نظر خواهد بود.

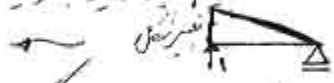
تابع	عامل متقارم	حذف شده	نیروی ⊕ متناظر
عکس العمل		قید تکیه‌گاه را حذف می‌کنیم	نیروی ⊕
برش		۲ مفصل اند که مقاومت برشی ایجاد می‌کنیم	مرتهای ⊕
لنگر		یک مفصل می‌گذاریم	لنگرهای ⊕

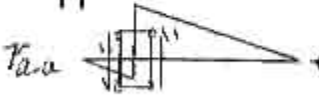
قید احذف کرده های آن نیروی ایجاد می‌گذاریم

مثال: رسم خط تاثیر R_A، V_{a-a}، M_{a-a} برش کنی.

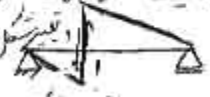


حذف تکیه‌گاه A و جای آن نیروی ① را گذاشتیم و تیر مشکل تیر را با شرایط جدید رسم می‌کنیم:





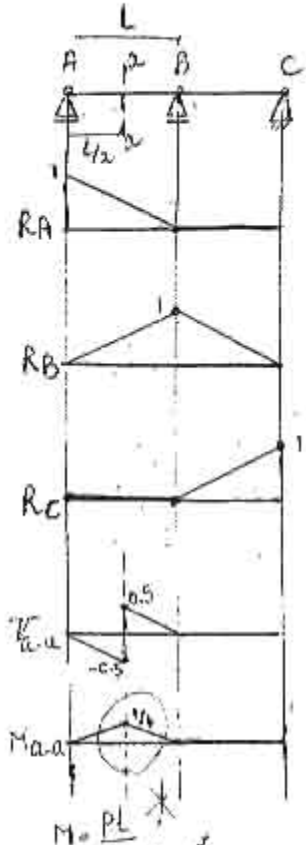
ایجاد مکانیزم برشی در مقطع a-a و در طرف نیروی واحد صفر شود و چول لنگر دارم



ایجاد مفصل در مقطع a-a و رسم معنی تیر مشکل بدان قرار دادن لنگر ⊕ در

طرف مفصل معنی تیر مشکل

www.khalvati.ir



مثال تیری معین، توابع خط تاثیر آنها مطلوبست:

$R_A, R_B, R_C, V_{1-1}, M_{1-1}$

* خط تاثیر R_A یا R_B یا R_C آن تیری واحد در هر نقطی تیر شکل. (از معادل سازی تکیه گاه متحرک و ثابت)

(منحنی تغییر شکل)

* خط تاثیر V_{1-1} یا M_{1-1} آن تیری واحد در هر نقطی تیر شکل)

(منحنی تغییر شکل)

* خط تاثیر R_A یا R_B یا R_C تیری واحد در هر نقطی آن در هر نقطی تیر شکل دیده یا توجه به:

$R_A + R_B + R_C = 1$ ..... پس از روی خط تاثیر R_A یا R_B می توان خط تاثیر R_C را رسم کرد.

* در مقطع a-a اگر تیر مرکب ایجاد کنیم، در طرفین آن بار واحد ⊕ در معادل فوق ایجاد شده در معادل B که می رسد دیگر طوری در دو معادل منتقل می شود به این صورت که گویا بار در BC باشد هیچ تیری ایجاد می کند.

(منحنی تغییر شکل)

* در مقطع a-a، معادل دارم و لنگر ⊕ یک پس معادل ایجاد شده می کند در معادل B که در سیم دیگر طوری در دو معادل منتقل می شود.

تذکر ۱: معادل هیچ دهانی را منتقل می کند پس نه برش، نه لنگر، بخواهیم داشت. (خط تاثیری شکل)

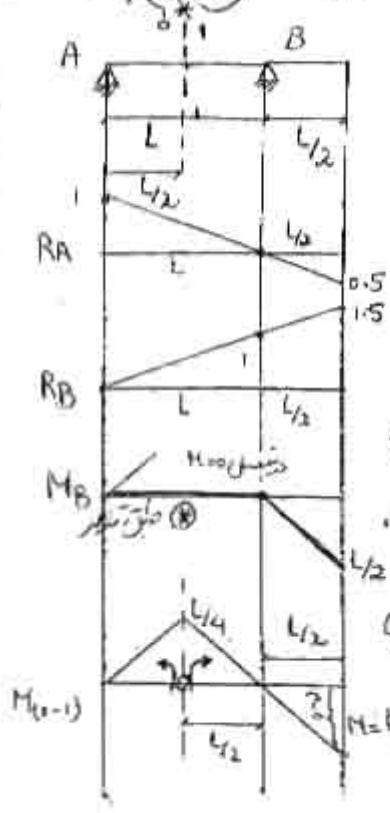
۲: حداکثر خط تاثیر عکس العمل تکیه گاهی، $\frac{1}{2}$ است، خصوصاً در طره ها بیشتر است.

۳: اگر معادل ایجاد کننده تکیه گاه باشد مثل، مثال قبلی، در هر دو طرفین به طرف پایین خم می شود.

Page 37

www.khalvati.ir

مثال) خط تاثیر R_B، R_A، M_B، $V_{(1-)}$، $M_{(1-)}$ و V_B رسم شود.

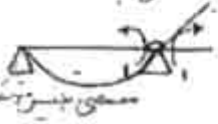


برای R_A، حرف تکیه a و قرارداد نیروی آن رسم معنی تغییر شکل:

برای R_B، حرف تکیه b و قرارداد نیروی آن رسم معنی تغییر شکل

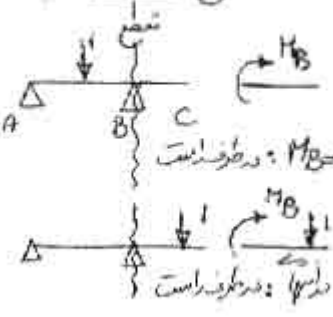
برای M_B، در گره B، منفصل می کنیم* منفصل تکیه b و با ست می شود. که عضو طرفین صلب شود و مثل منفصل ها قبلی ست که نشکند و با لنگر، و با این منفصل روی تکیه b، دو عضو طرف با هم صلب می شود.

دیگر قرمه داشته تا تشدید با این منفصل روی B نیز سازه معین است و M_B در حالت ① می باشد.



تذکر*: چون تغییر شکل معنی دارد و باید در خط تاثیر سازه معین، خط مستقیم داشته باشیم. پس این معنی مورد ندارد که بگیم عنی اگر یا در نقطه AB حرکت کند، جسم گیردار در B ایجاد نمی شود، زیرا در آن صورت آزاد است و تمام گیردار می برد.

اثبات قضیه فوق:



خط تاثیر نیروی داخلی ای وقتی که گیردار باشد در نقطه شود، M_B داریم.

(در دنباله AB) زیرا با بردایم

(در دنباله BC) ماکزیمم M_B زمانی است که 1 در انتها باشد.

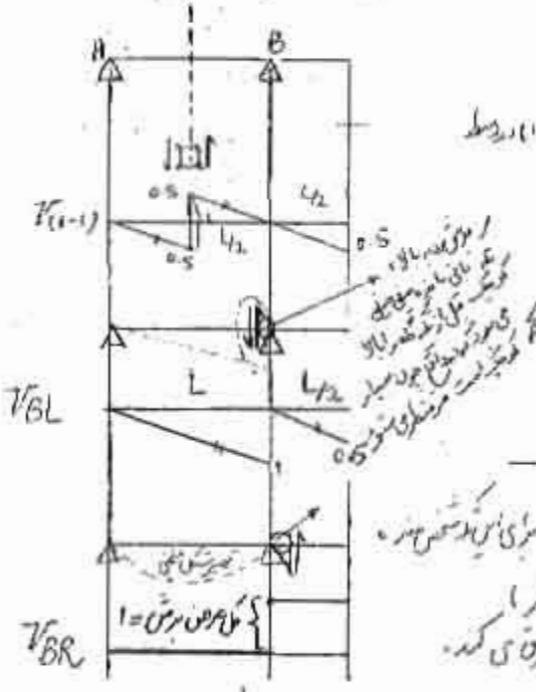
www.khalvati.ir

حداکثر موجود عرض چه؟ که در $M_{(1-1)}$ می‌بینیم، یعنی بار در این محل (بالای طره) باعث لنگر خمشی در مقطع (1-1) حقیقی است.

حالا می‌توانیم مقدار عرض چه را به راحتی بدست آوریم، یعنی بار ↓1 را نیز در محل مقطع (1-1) گذاشته و لنگر بگیریم.

بار ↓1 در مقطع (1-1) ① $\rightarrow M = \frac{PL}{4}$ ، $P=1 \rightarrow M = L/4$

واز تشابه $\rightarrow \frac{L/4}{?} = \frac{L/2}{L/2} \rightarrow ?M = 1/4$



رسم خط تاثیر V_B و $V_{(1-1)}$:

برای رسم $V_{(1-1)}$، کل عرض مماسی ① در مقطع (1-1) در وسط است پس در بالا و پایین 0.5 داریم.

حال خط تاثیر V_B:

توضیح ← به عرض

ی حالا تقسیم عرض را در دو قسمت داشته باشیم:

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_L + R = V_R$: برای این قسمت خواهیم داشت

① تا محل $R = V_L - V_R$ (نیروی متمرکز)

② عرض در طرفین اعمال بار متمرکز با هم برابر می‌کند.

پس به همین دلیل مهم است که بدانیم:

$V_B \rightarrow \begin{cases} V_{BL} & \text{(بار در قسمت چپ تکیه‌گاه B)} \\ V_{BR} & \text{(بار در قسمت راست تکیه‌گاه B)} \end{cases}$

V_{BR}: خط تاثیر عرض طره است

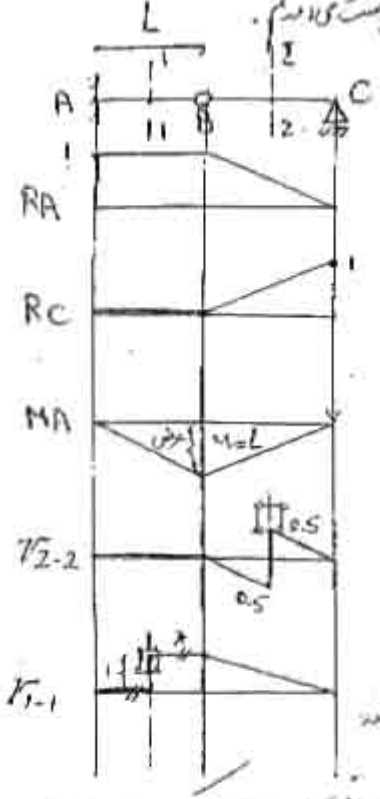
یعنی تا زمانی که بار وارد طره می‌شود عرض برابر 1 است.

www.khalvati.ir

نکته: در رسم منحنی های خط تاثیر به این منظور باید نکات زیر را مدنظر قرار داد:

① اگر پاره خطی عمود بر تیر شکل بصورت منفی باشد، از آن صرفنظر نموده و در آن قسمت خط تاثیر را صفر رسم می کنیم.

② اگر در رسم خط تاثیر لنگر، ماصل ایجاد شده تواند حرکت کند (تکیه‌گاه متحرک باشد) یا حرکت آنها در سازه عضو تغییر شکل منحنی ایجاد نکند از آن حرکت صرفنظر نموده و تغییر شکل و عضو مادر مفصل را تحت اثر لنگر اعمال شده بدست می آوریم.



مثال) خط تاثیر R_A, R_C, M_A و $V_{(1-1)}, M_{(1-1)}$ و $V_{(2-2)}, M_{(2-2)}$

(نحوه تغییر شکل در هر حالت را با اعمال بار واحد دلخواه بدست می آوریم)

(RA) در تکیه‌گاه A، قبل از آنکه خط شروع به رسم کند بار واحد را بر روی تکیه‌گاه A می گذاریم و در مفصل B می نشیند و به جسم نمی رسد.

(RC) بار واحد را بر روی C می گذاریم که $R_A = R_C = 1$ می شود.

(MA) در A، (مفصل جسم تکیه‌گاه) می گذاریم و نقطه باید دقیقا عضو مجاور را رسم می کنیم و در مفصل B می نشیند ($M_A = 0$ ← (باید لحاظ شود، A بازدارد))

برای مفصل، لنگر تکیه‌گاه A سمت چپ (عرض خط تاثیر) با استفاده از ماریو A:

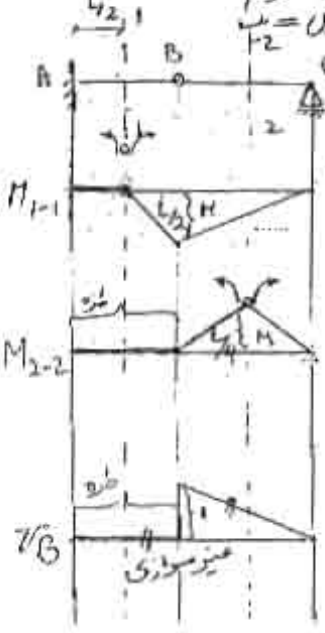
$M_B = 1 \times L$

و نقطه بدست:

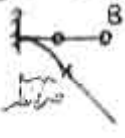
www.khalvati.ir

V_{B-1} سمت چپ مقطع (1-1)، تکیه‌گاه است و تغییر شکل نمی‌دهد پس عرضی می‌شود و در مفصل B داری دو مقطع دیگر، مفصل B می‌شکند. خط تأثیر در طرف چپ مقطع (1-1) با هم مقداری اندکی با هم ساده است پس باید اینطور باشد.

V_{B-2} سمت چپ مفصل B، یک تکیه است تغییر شکل نمی‌دهد و عرضی می‌شود، در مفصل B می‌شکند در مفصل ایجاد می‌شود در مقطع (2-2) نیز می‌شکند و دو تا عرضی $= \frac{1}{1-2}$



$M_{(1-1)}$ در مقطع مفصلی می‌گذاریم سمت چپ مفصل ایجاد می‌شود و با منفی تغییر شکل نمی‌دهد که عرضی می‌شود در محل این مفصل و مفصل (B) می‌شکند



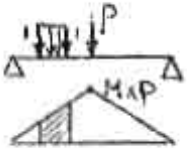
$M = 1 \times L/2$: از استاتیک

$M_{(2-2)}$ باردی (2-2)، عکس العمل C 0.5: تا قبل از مفصل B، تیر عرضی می‌شود در B می‌شکند

$M = R_C \times L/2 \Rightarrow M = 1/2 \times L/2 = L/4$: از استاتیک

تذکر* تنها خط تأثیری که قسمت چپ و راستش در برش می‌تواند متفاوت باشد، در مفصل است. (غیر موازی)

V_B در مورد V_B (B مفصل است)



حداکثر مقادیر توابع برآیند بارهای غیر از واحد

(بار در غیر از ① و یا حتی بصورت گسترده)

بار گسترده، مجموعه‌ای از بارهای واحد است.

عرض خط تأثیر در هر یک از بارهای وارده در جهت که آنها را جمع می‌کنیم.

www.khalvati.ir

منحنی های خط تأثیر برای بار متمرکز واحد رسم می شوند، اگر بار گذاری روی تیر غیر متمرکز باشد، برای محاسبه تأثیر در نقطه به شیوه زیر عمل می کنیم:

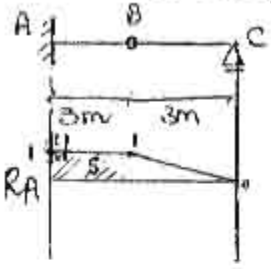
الف) اگر بار متمرکزی با مقدار غیر از واحد به سازه اعمال شود، عرض خط تأثیر را در هر مقطع مورد نظر در مقدار آن بار ضرب می کنیم. (M×P)

ب) اگر مجموعه‌ای از بارهای متمرکز به سازه اعمال شود، برای محاسبه تأثیر تابع هریک از بارها را در عرض خط تأثیر متناظر با خودش ضرب نموده و حاصل آنها را با یکدیگر جمع می کنیم.

ج) اگر بار گسترده به سازه اعمال شود (با شدت ثابت یا متغیر) برای محاسبه تأثیر تابع بر سطح زیر خط تأثیر در محدوده‌ای که بار گسترده اعمال می شود، در شدت آن بار ضرب می کنیم. (S×q)

(بار گسترده) = (+) سطح (−) سطح ..... جمع جبری سطح

مثال: اگر بار متمرکز 5ton و علاوه بار گسترده‌ای به شدت 2t/m و طول محدود 3m از وسط تیر شکل زیر عبور کند، عمده ترین مقدار عکس العمل تکیه گاه (A) چقدر خواهد شد؟



(الف) 5ton ↓ (ب) 2t/m

* می تواند هر جای تیر باشد چون تیر صلب است.

الف) اثر متمرکز: $R_A = 1 \times 5 = 5\ ton$

هر جایی در قسمت AB که بگیریم برابر است.

ب) اثر گسترده: $R_A = S \times q = (3 \times 1) \times 2$ * بار گسترده در نقطه اول است، مساحت مثلثی

در قسمت AB $R_A = 6\ ton$ (است نه نقطه BC دارد)

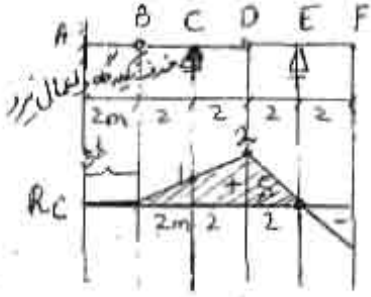
$5 + 6 = 11\ ton$

تذکره: اگر بار گسترده را به طول نامحدود بیان کرده بود، در اینصورت برای محاسبه تأثیر باید کل مساحت زیر خط تأثیر را در نظر می گرفتیم.

تذکر: اگر در خط تأثیر مساحت منفی داشتیم، و طول نامحدود بود، مساحت مثلث (+) را فقط برای محاسبه تأثیر بار گسترده در نظر می گرفتیم.

www.khalvati.ir

مثال) در شکل روبرو بار یکنواخت w در روی آن عبور کند. حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه C چقدر خواهد شد؟

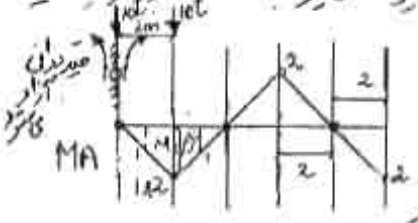


خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه C

* دهانه‌های (B و D) معلق داخلی اند ← مفصلی داریم.
* دهانه‌ی طرفی (w) مطرح نیست، در دهانه‌ای باید اعمال شود که حداکثر تحریک را دهد.
* در C، می‌توانیم شکست داشته باشیم و باید آن قدر مرد تا به مفصل D برسد و بشکند.

(BE حداکثر اعمال بار روی): $S \times q = \left(\frac{6 \times 2}{2}\right) w = 6w$

مثال) در مثال قبل اگر در بار متمرکز 10ton به دهانه‌ی 2m چهارم و بار گسترده‌ی یکنواخت نیز عبور کند، حداکثر لنگر خمشی تکیه‌گاه A چقدر خواهد شد؟



خط تأثیر لنگر خمشی تکیه‌گاه A

بار روی B، فقط طره را هم می‌کند و بعد، فقط از لنگی بالا و پایین می‌رود و هیچی ندارد.

بار روی B باعث می‌شود $M_A = 2$ (انتخاب)

چون نیت‌ها نگفته‌اند، بنابراین جای دیگر $10t = P$ قرار می‌گیرد به هر حال M (طرف) باید چه باشد

$0 \Rightarrow 2$

$1 \Rightarrow 1$

$2 \Rightarrow 0$

یا خنثی شده ⊖ یا هر دو در کنار هم ⊕ :

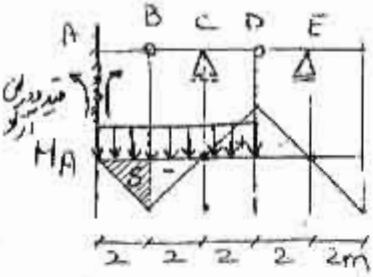
$10 \times 0 + 10 \times 2 = 20$

$10 \times 1 + 10 \times 1 = 20$

$10 \times 2 + 10 \times 0 = 20$

www.khalvati.ir

مثال) اگر یک بار گسترده به شدت 2 t/m و طول 6m که روی تیر حرکت کند. حداکثر لنگر ایجاد شده در تکیه‌گاه A چقدر می‌شود؟

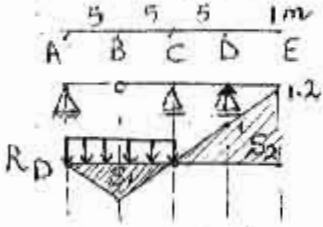


در 6m بارگسترده اعمال شده که S ⊕ و S ⊖ هستند را حتی می‌کشد و باقیمانده قسمت خاکستور خورده است.

$$M = S \times \frac{9}{3} = \left(\frac{2\times 2}{2}\right)\times 2 = 4$$

هرچه تیر کوتاه باشد، از مساحت یک مثلث ایجاد شده خاکستور خورده باقی می‌ماند.

مثال) اگر بارگسترده‌ای به شدت 1 t/m به طول نامحدود از روی تیر زیر عبور کند. نقطه D



برای چه عکس العملی طراحی می‌شود؟

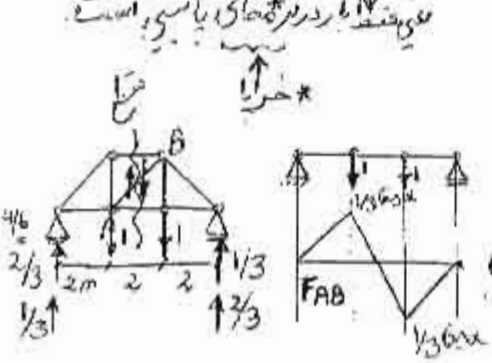
پس فرض می‌کنیم خط زیر که در محدوده A-C باشد. نیروی اعمال در D را تا CE را بالا می‌برد.

$$S_1 = \frac{10\times 1}{2} = 5 \ominus \text{Max} \qquad S_2 = \frac{6\times 1.2}{2} = 3.6 \oplus$$

$$R_D = S \times \frac{9}{3} = 5\times 1 = 5$$

برای ماکزیمم شدن بار یا کاملاً باید در قسمت ⊕ باشد، یا کاملاً باید در قسمت ⊖ باشد.

مثال) اگر مجموعه‌ای بسکول زیر، بار متمرکز 10t روی پل قطاری حرکت کند. حداکثر نیروی شود AB حقیقت حواهد بود.



بار وارد بر تیرهای پاسخ است

خروجی

بار وارد بر A: عکس العمل تکیه‌گاه‌ها بدست خواهد آمد

مولفه قائم روی بالا $\frac{1}{3}\uparrow$: در نقطه چپی $\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$

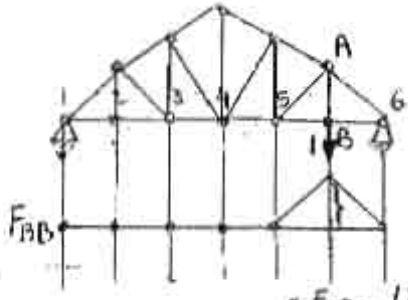
کشش $\oplus F = \frac{1}{3}$

بار وارد بر B: فشاری $\ominus$: در نقطه چپی $\frac{1}{3}$ روی بالا $\rightarrow \frac{1}{3}$ روی پایین

www.khalvati.ir

$\Theta F = \frac{1/3}{600}$ فشاری ← وحداکثر نیروی عضو کمر $F_{AB(max)} = 10^t \times \frac{1/3}{600}$

مثال) اگر بار متحرک $5t$ روی پایین‌ترین گره‌ها حرکت کند، خط تاثیر نیروی محوری عضو AB را رسم کنید.



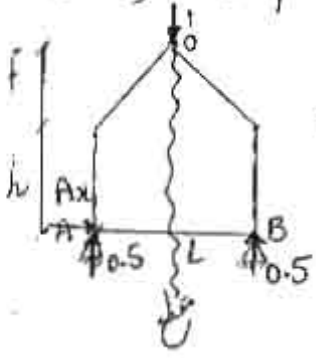
عضوهای صفر نیروی هستند و قطعه‌ای که در (B) بار اعمال شود، نیروی در آن می‌ماند و از صفر نیروی خارج می‌شود.

نیرو در گره‌های اعمال بشود، F_{AB} به علت صفر نیروی بودن آن، صفر است.

نیرو در گره‌های 1، 2، 3، 4، 5، 6 باشد ← $F_{AB} = 1 \times 5 = 5$

$F_{AB} = 0$

مثال) خط تاثیر عکس العمل افقی A چیانچه بار واحد بصورت دائم روی سقف این سازه حرکت کند، کدام شکل خواهد بود.



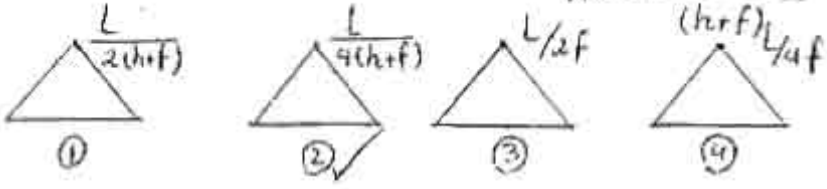
در شکل‌هایی که داریم، قطعاً آنها متناسب از نظر اندازه، یعنی بار واحد روی پاس و عکس العمل افقی A را بدست می‌آوریم.

$\Sigma M_0 = 0$ در جهت حرکت ←

$A_x \times L/2 = A_x(h+f)$

0.5

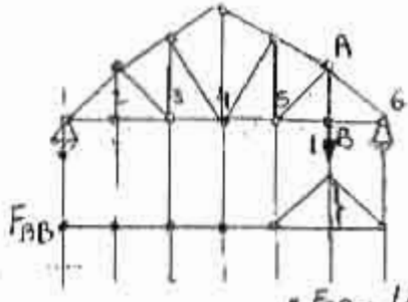
$A_x = \frac{0.5 \times L/2}{(h+f)}$



www.khalvati.ir

$\ominus F = \frac{1}{3}$ فشاری ← وحداکثر نیروی عضو کمر $F_{AB(MAX)} = 10^t \times \frac{1/3}{6\alpha}$

مثال) اگر بار متحرک 5^t روی پل از سمت راست حرکت کند، خط تاثیر نیروی محوری عضو AB را رسم کنید.



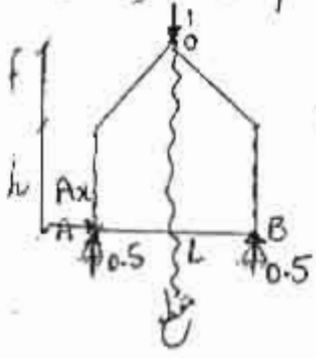
عضوهای صفر نیروی هستند و فقط زمانی که در (B) بار اعمال شود، نیروی در آن می‌ماند و از صفر نیروی خارج می‌شود.

نیرو در میله‌های اعمال نشود، F_{AB} = علت صفر نیروی بودن آن، صفر است.

نیرو در گره‌های 1، 2، 3، 4، 5، 6 باشد ← $F_{AB} = 1 \times 5 = 5$

$F_{AB} = 0$

مثال) خط تاثیر عکس العمل افقی A چیست بار واحد بصورت دائم روی سقف ساختمان حرکت کند. کدام شکل جواب است.



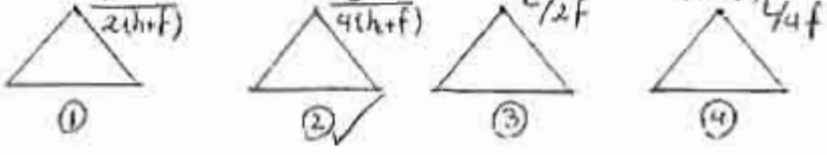
در شکل‌های که داریم، قطعاً آنها متناسب از نظر اندازه، یعنی بار واحد روی راس و عکس العمل افقی A را بدست می‌آوریم.

$\sum M_0 = 0$ ← حول نقطه 0 گشتاور می‌گیریم

$Ax \times L/2 = Ax(h+f)$

$Ax = \frac{0.5 \times L/2}{(h+f)}$

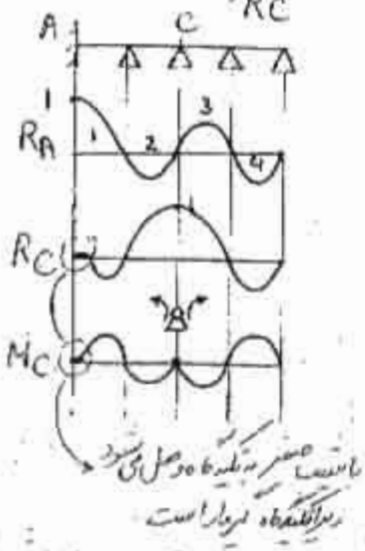
0.5



www.khalvati.ir

خط تاثیر تابعهای داخلی

مثال) اگر بارگسترده‌ای بطول نامحدود روی تیر اعمال شود، بیشترین مقدار R_A چقدر است؟ R_C؟



⊕ 1,3

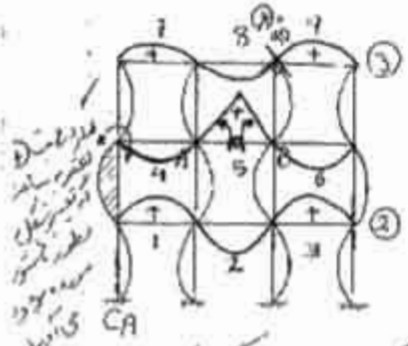
⊖ 2,4

کجا بیشترین لنگر منفی C ایجاد می‌شود: M_C

با اعمال بار در: (2,3)

.....

مثال) بارگسترده زیر با کدام دهانه‌ها اعمال شود که لنگر ⊕ دهانه AB ماکزیمم شود؟



ابتدا تیر شکل تیرهای دهانه مورد نظر را رسم می‌کنیم

تیر شکل ستونهای بدیهی و جهت تیرهای ② و ③

ابتدا از CA وارد گره * شروع می‌کنیم که محدوده تغییر شکل تیرها در دهانه‌های مطلب ⊕ و ⊖ داریم.

تذکر * خاصیت تابعهای مطلب و خنثی این است که تیر شکل یک نقطه در هر کدام می‌تواند

لنگر ⊕ در دهانه‌های «1-3-5-7-9»

⊛ زاویه تیر و ستون عدد دوران نیز باید 90° باشد (خطوط عمود بر تیر شکل تیر و ستون باید بر هم عمود باشند)